Académie impériale des sciences. Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. Tome 5, 1912-1913, Saint-Pétersbourg.

SOMMAIRE

Livraison I, 1912

Comptes-rendus des séances de la Commission Centrale Sismique Permanente :

*Séance du 8 janvier 1911 I
Rapport financier de l'Association Internationale Sismologique pour la période du 1-er avril 1909 jusqu'au 31 mars 1910 XIII
Projet de Budget intérimaire de l'Association Sismologique pour la période du 1-er avril au 31 août 1911 XVIII
*Séance du 25 février 1911 XX
* » » 13 mai 1911 XXXI
*Rapport concernant la station sismique de 2-me ordre à Ekaterinburg durant l'année 1910 XLI
*Séance du 28 octobre 1911 XLV
*Résumé du rapport de M. K. Bogdanovic : « Sur le tremblement de terre de Tien-Chan le 22 déc. 1910 (4 janv. 1911) LII
*Rapport concernant la station sismique de 1-er ordre à l'Observatoire physique de Tiflis durant l'année 1910 LVII
*Rapport concernant la station sismique de 1-er ordre à l'Observatoire météorologique d'Irkutsk durant l'année 1010 LVIII
*Séance du 16 decembre 1911 LX

Fr. Moldenhauer. Seismische Einwirkungen auf den Charakter der Lebenstätigkeit intermittierender Quellen 1
Fürst B. Galitzin (Golicyn). Zur Theorie der mechanischen Registrierung. 35
*A. Gerasimov. Note concernante l'article: « Sur le tremblement de terre du 22 déc. 1910 et du I janv.1911 dans la province de Semirecie » par M. S. Veleckij 85
*G. Levickij. La deuxième assamblée générale de l'Association Internationale de Sismologie et la quatrième réunion de la Commission Permanente de la dite Association à Manchester le 18-22 juillet 1911 87

Livraison II, 1912

*A. Orlov. Sur l'élaboration des sismogrammes du pendule apériodique à l'enregistrement galvanométrique 95
*P. Nikiforov. Instruction pour l'installation des pendules horizontaux lourds, système du Prince B. Galitzine, et pour les observations à l'aide de ceux-ci..... 105
J. Wilip. Die Zentrale Seismische Station in Pulkovo..... 133
*Prince B. Galitzine (Golicyn). Sur les appareils pour les observations sur les sources intermittentes..... 171
*Prince B. Galitzine (Golicyn). Sur la longeur reduite du pendule horizontal à suspension Zöllner..... 195

Livraison III, 1913

*M. Rosental. Sur la détermination de la profondeur du foyer d'un tremblement de terre..... 237
Prince B. Galitzin (Golicyn). The principles of instrumental seismology 329
Fürst B. Galitzin (Golicyn). Zur Frage der Bestimmung der Herdtiefe eines Bebens und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen in den oberen Erdschichten. 359
*M. Büss. Une méthode graphique pour déterminer les quantités x_m et (δ+δ1) dans le cas de l'enrégistremment galvanométrique 431

Le titre désigné par un asterisque * présente la traduction du titre original.

ИМПЕРАТОРСКАЯ АКАДЕМІЯ НАУКЪ.

ИЗВѢСТІЯ
ПОСТОЯННОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ КОМИССІИ.

Томъ 5.

Выпускъ III.

ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE
LA COMMISSION SISMIQUE PERMANENTE.

Tome 5.

Livraison III.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1913. ST.-PÉTERSBOURG.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
Апрѣль 1913 года. Непремѣнный Секретарь, Академикъ *С. Ольденбургъ.*

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.

Оглавленіе. — Sommaire.

	Стр.
Э. Розенталь. Объ опредѣленіи глубины очага землетрясенія.	237
*Князь Б. Б. Голицынъ. Принципы инструментальной сейсмологіи. . . .	329
*Князь Б. Б. Голицынъ. Къ вопросу объ опредѣленіи глубины очага землетрясенія и скорости распространенія сейсмическихъ волнъ въ верхнихъ слояхъ земли	359
Е. Бюсъ. Графическій способъ опредѣленія величинъ x_m и $(\delta + \delta_1)$ при гальванометрической регистраціи. .	431

	Pag.
*M. Rosental. Sur la détermination de la profondeur du foyer d'un tremblement de terre	237
Prince B. Galitzin (Golicyn). The principles of instrumental seismology.	329
Fürst B. Galitzin (Golicyn). Zur Frage der Bestimmung der Herdtiefe eines Bebens und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen in den oberen Erdschichten. . . .	359
*M. Büss. Une méthode graphique pour déterminer les quantités x_m et $(\delta + \delta_1)$ dans le cas de l'enrégistremment galvanométrique	431

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкой *, является переводомъ заглавія оригинала.

Le titre désigné par un asterisque * présente la traduction du titre original.

Объ опредѣленіи глубины очага землетрясенія.

Э. Розенталь.

Введеніе.

§ 1. Опредѣленіе глубины очага землетрясенія несомнѣнно одна изъ интереснѣйшихъ задачъ сейсмологіи, привлекавшая уже давно вниманіе изслѣдователей. Физическій смыслъ задачи очевиденъ. Въ плейстосейстовой области движеніе почвы въ огромномъ большинствѣ случаевъ направлено вертикально снизу вверхъ или по крайней мѣрѣ вертикальная составляющая тамъ значительно преобладаетъ. Очагъ землетрясенія долженъ, слѣдовательно, находиться подъ видимой поверхностью земли.

Точное опредѣленіе глубины его дало бы возможность, яснѣе опредѣлять причины происхожденія землетрясеній и лучше понимать механизмъ этихъ явленій.

Къ сожалѣнію и до настоящаго времени нельзя подобрать среди разбросанныхъ въ литературѣ случаевъ сколько-нибудь достовѣрныя числа. Вычисленныя по разнымъ методамъ глубины совершенно сходныхъ по характеру землетрясеній колеблятся въ предѣлахъ примѣрно отъ 1 до 200 километровъ и больше, а иногда столь-же разнообразныя числа получаются для одного и того-же землетрясенія. Нужно сознаться, что мы и въ настоящее время такъ-же мало знаемъ объ истинной глубинѣ очага землетрясеній, какъ 50 лѣтъ тому назадъ.

§ 2. Причины такого явленія, повидимому, троякаго рода. Первая и главная изъ нихъ — недостаточная точность наблюденій, получаемыхъ изъ плейстосейстовыхъ областей. Очевидно, что огульныя данныя о поврежденіяхъ зданій и т. п., субъективно растяжимыя ощущенія случайныхъ, совершенно неподготовленныхъ наблюдателей или, наконецъ, сомнительныя пока-

занія болѣе или менѣе примитивныхъ приборовъ едва-ли могутъ служить основаніемъ болѣе точныхъ вычисленій. Улучшеніе этихъ условій, къ сожалѣнію, не по силамъ *одному* человѣку и вычислителю приходится пользоваться наблюденіями, недостаточно соотвѣтствующими его цѣлямъ. Все-же за послѣдніе годы производство наблюденій въ нѣкоторыхъ, по крайней мѣрѣ, областяхъ, подверженныхъ частымъ землетрясеніямъ, замѣтно усовершенствуется и можно надѣяться, что въ самомъ непродолжительномъ будущемъ наберется матеріалъ, далеко превосходящій въ смыслѣ точности и благонадежности тѣ немногія данныя, которыя въ настоящій моментъ доступны сейсмологу. Поэтому теорія, принимая во вниманіе быстрое развитіе техники наблюденій, можетъ и должна считаться съ нѣсколько большей точностью основного матеріала, чѣмъ съ той, которую представляютъ обработанныя до сихъ поръ землетрясенія.

§ 3. Вторая причина несогласія полученныхъ разными методами глубинъ объясняется существомъ вопроса. Очагъ землетрясеній въ большинствѣ случаевъ обладаетъ значительными размѣрами и неправильной геометрической формой. Нельзя, конечно, уподобить всю плейстосейстовую область, занимающую иногда громадную площадь, математической точкѣ. Все-же мало вѣроятно, чтобы сотрясеніе почвы началось вполнѣ одновременно и съ совершенно одинаковой силой во всѣхъ точкахъ пространства, измѣренія котораго выражаются десятками и сотнями километровъ. Нужно думать, — а такое представленіе на основаніи положительныхъ данныхъ укрѣпляется въ послѣднее время въ литературѣ, — что движеніе почвы исходитъ изъ одной какой-нибудь точки и оттуда распространяется до другихъ точекъ «очага» и земной поверхности, вызывая тамъ новыя, усиленныя колебанія. Начало первыхъ, едва замѣтныхъ колебаній, наступленіе отдѣльныхъ, выдающихся волнъ, максимальное сотрясеніе — всѣ эти фазы могутъ относиться къ разнымъ точкамъ, находящимся на разныхъ глубинахъ.

Желательно поэтому выработать такіе методы опредѣленія глубины очага, которые основываются исключительно на одномъ какомъ-нибудь элементѣ, доступномъ наблюденію, напр. только на моментахъ появленія первыхъ, едва замѣтныхъ колебаній и т. д. Исполненіе и этого пожеланія отчасти вопросъ будущаго. Во всякомъ случаѣ, въ силу изложенныхъ обстоятельствъ, подробно разработанная теорія методовъ опредѣленія глубины очаговъ необходима.

§ 4. Эта послѣдняя необходимость и приводитъ насъ къ третьей причинѣ неудовлетворительнаго состоянія нашихъ познаній о трактуемомъ здѣсь вопросѣ. Въ разное время разными авторами предложены были самые

разнообразные способы, давшіе весьма разнообразные результаты. Изъ нихъ большинство не подвергалось никакой сравнительной критикѣ, такъ что цѣнность добытыхъ цифръ совершенно неизвѣстна. Кромѣ того, всѣ эти способы страдаютъ однимъ общимъ недостаткомъ, состоящемъ въ допущеніи прямолинейнаго распространенія сейсмическихъ волнъ, т.-е. въ допущеніи, явно не соотвѣтствующемъ дѣйствительности. На сколько это допущеніе можетъ отразиться на результатѣ, не поддается оцѣнкѣ a priori.

Приведенныя обстоятельства и побудили меня къ составленію нижеслѣдующаго опыта усовершенствованія теоріи методовъ опредѣленія глубины очага землетрясенія.

Съ этой цѣлью сначала разсматриваются извѣстные мнѣ прежніе способы рѣшенія задачи, причемъ относительныя ихъ преимущества и недостатки выясняются путемъ теоретическихъ соображеній и на примѣрахъ. Затѣмъ разсматриваются работы, на основаніи которыхъ создалась необходимость считаться съ кривизной сейсмическаго луча, и формулируется общій видъ задачи. Далѣе выводятся формулы, служащія для опредѣленія глубины очага и позволяющія принять въ разсчетъ, кривизну траекторіи сейсмическихъ колебаній.

Въ слѣдующей затѣмъ главѣ помѣщенъ обзоръ тѣхъ основныхъ данныхъ наблюденій, на основаніи которыхъ рѣшеніе задачи можетъ быть получено. Въ главѣ V предлагаемыя формулы примѣняются къ нѣсколькимъ примѣрамъ и этимъ выясняется возможность, получить въ благопріятныхъ случаяхъ реальныя значенія для глубины очага землетрясенія. Послѣдняя глава посвящена самостоятельному изысканію о траекторіи сейсмическихъ волнъ, на основаніи котораго получается прямое доказательство сдѣланныхъ въ предыдущихъ главахъ допущеній, независимо отъ изслѣдованій другихъ авторовъ.

Читатель, надѣюсь, убѣдится въ томъ, что всѣ опубликованныя раньше числа для глубины очага землетрясеній, никакого реальнаго значенія не имѣютъ. Все-же нельзя считать задачу вполнѣ безнадежной. Въ числѣ приводимыхъ въ главѣ V примѣровъ найдутся два случая, въ которыхъ удалось хотя и довольно грубое опредѣленіе глубины очага.

О главнѣйшихъ результатахъ нижеслѣдующей работы я сообщилъ уже вкратцѣ на II Менделѣевскомъ Съѣздѣ, состоявшемся въ С.-Петербургѣ 21—28 декабря 1911 г., а также въ Варшавскомъ Обществѣ Естествоиспытателей.

Считаю пріятнымъ долгомъ принести искреннюю благодарность всѣмъ коллегамъ по наукѣ, любезно приславшимъ мнѣ отдѣльные оттиски своихъ

работъ и снабдившихъ меня такимъ образомъ драгоцѣннымъ матеріаломъ для нижеслѣдующихъ изслѣдованій. Прошу гг. Agamennone, князя Голицына, Kövesligethy, Oddone, Rizzo, Rudzki, Trabert принять выраженіе полной признательности. Благодарю отъ души и Постоянную Центральную Сейсмическую Комиссію, распорядившуюся въ печатаніи этой работы.

Глава I.

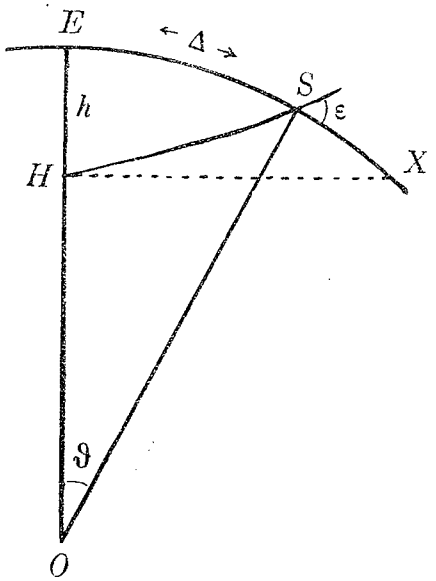
Прежніе способы опредѣленія глубины очага землетрясенія.

§ 5. Въ слѣдующемъ мы разсмотримъ по очереди главнѣйшіе способы опредѣленія глубины очага землетрясенія, предложенные до сихъ поръ, причемъ выясняются относительныя достоинства ихъ.

Введемъ слѣдующія обозначенія (черт. 1) и сокращенія.

Пусть будетъ:

Черт. 1.



O . . . . . центръ земли
E . . . . . эпицентръ
H . . . . . очагъ или гипоцентръ
S . . . . . мѣсто наблюденія
$OE = OS = R$ . . . радіусъ земли

и проведемъ $HX \perp OE$. Далѣе положимъ, что:

h . . . . . глубина очага
ϑ . . . . . уголъ EOS
Δ . . . . . дуга ES
ε . . . . . т. н. уголъ выхода
I_E, I_S . . . сила сотрясенія въ точкахъ E, S.
$HS = s$ . . длина сейсмическаго луча
τ . . . . . время наступленія сотрясенія въ точкѣ S.

§ 6. Первая попытка опредѣленія глубины очага землетрясенія принадлежитъ, кажется, Mallet'у[1]). Его способъ основанъ на наблюденіяхъ

---

[1]) R. Mallet. The great Neapolitan Earthquake of 1857. 2 тома. London 1862. См. также Br. Ass. Rep. for 1858.

угла ε. Предполагая, что по трещинамъ въ зданіяхъ и т. п. можно опредѣлить уголъ ε съ достаточной точностью, и считая треугольникъ *HES* прямолинейнымъ, Mallet по Δ и ε опредѣляетъ h. Для болѣе точнаго опредѣленія ε онъ пользовался еще слѣдующимъ разсужденіемъ. Энергія землетрясенія, распространяющаяся въ видѣ упругихъ колебаній, убываетъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія отъ очага. Если считать интенсивность на разстояніи 1 отъ очага равной 1, то

$$I_S = \frac{1}{h^2 + \Delta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Опрокидываніе предметовъ и т. д. обусловливается только горизонтальной проекціей этой силы, т. е. выраженіемъ

$$\frac{\cos \varepsilon}{h^2 + \Delta^2}.$$

Такъ какъ

$$\cos \varepsilon = \frac{\Delta}{\sqrt{h^2 + \Delta^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

то наибольшія разрушенія должны наблюдаться въ такой точкѣ, для которой выраженіе

$$P = \frac{\Delta}{(h^2 + \Delta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

достигаетъ максимума. Отыскивая максимумъ выраженія (3), найдемъ, что въ этомъ случаѣ

$$\Delta = \frac{h}{\sqrt{2}}; \qquad \cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \varepsilon = 54^\circ 44' 9'' \ldots\ldots\ldots (4)$$

Для землетрясенія 1857 г. Mallet изложеннымъ путемъ опредѣлилъ среднюю глубину $h = 10$ км., причемъ крайнія величины были 15 км. и 5 км.

Позднѣе Falb[1]) нѣсколько видоизмѣнилъ этотъ способъ, соединяя наблюдательные пункты попарно и освобождаясь такимъ образомъ отъ предварительнаго опредѣленія точки E. Для простѣйшаго случая, когда прямая, соединяющая точки S_1 и S_2 проходитъ черезъ E, имѣемъ

$$h = (\Delta_2 - \Delta_1) \frac{\sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2}{\sin (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

---

[1]) R. Falb. Gedanken und Studien über den Vulkanismus. Graz 1876.

§ 7. Приведенные способы неоднократно подвергались строгой отрицательной критикѣ. Нѣтъ никакой возможности, опредѣлить уголъ ε изъ поврежденій зданій и тому подобныхъ разрушеній, произведенныхъ землетрясеніемъ. Такія явленія имѣютъ весьма сложный механическій характеръ и зависятъ не только отъ угла ε, но и отъ многихъ другихъ причинъ случайнаго и систематическаго характера. Разсужденія Mallet'а о зонѣ максимальнаго разрушенія не строги еще потому, что энергія землетрясенія распространяется не только въ видѣ продольныхъ колебаній вдоль *HS*, но и въ видѣ поперечныхъ колебаній и др. Реальность существованія такой зоны болѣе чѣмъ сомнительна и въ позднѣйшей сейсмической литературѣ она уже обходится просто молчаніемъ.

Удивительная кажущаяся точность, полученная тѣмъ не менѣе Mallet'омъ въ разобранномъ имъ примѣрѣ, лучше всего объясняется критическими замѣтками Neumayr'а[1]). Онъ указываетъ на абсолютную невозможность, использовать для опредѣленія угла выхода *всѣ* встрѣчаемыя въ плейстосейстовой области разрушенія и поврежденія. Необходимо сдѣлать нѣкоторый подборъ, основанный на лучшемъ согласіи отдѣльныхъ случаевъ съ субъективно предвзятымъ мнѣніемъ, а такая субъективность и представляетъ Ахиллесову пяту не только способа Mallet'а, но и многихъ другихъ способовъ опредѣленія глубины очага.

Наконецъ нужно обратить вниманіе еще на то обстоятельство, что уголъ ε на чертежѣ представляетъ уголъ между прямымъ продолженіемъ луча *HS* и земной поверхностью или «истинный» уголъ выхода по терминологіи князя Б. Б. Голицына.[2]). Этотъ уголъ и нуженъ для рѣшенія треугольника *HES*. На земной поверхности можно, однако, только наблюдать «кажущійся» уголъ выхода, измѣненный отраженіемъ при встрѣчѣ съ поверхностью земли. На это обстоятельство впервые указалъ Schuster[3]). Мы въ дальнѣйшемъ еще вернемся къ этому вопросу.

§ 8. Вслѣдствіе изложенныхъ обстоятельствъ послѣ Mallet'а изслѣдователи стали обращаться къ другимъ доступнымъ наблюденію элементамъ для рѣшенія треугольника *HES*. Нахожденіе угла ε можно замѣнить опредѣленіемъ отношенія длинъ $HE : HS$, что, въ случаѣ прямолинейнаго треугольника, сводится къ опредѣленію синуса истиннаго угла выхода.

Отношеніе это можно опредѣлить двоякимъ образомъ. Можно сравни-

---

[1]) M. Neumayr. Erdgeschichte. I Bd. Leipzig 1886.

[2]) Fürst B. Galitzin (Golicyn). Beobachtungen über die Vertikalkomponente der Bodenbewegung. Изв. Имп. Академіи Наукъ. 1911, стр. 983 — 1006.

[3]) A. Schuster. Über die durch seismische Wellen hervorgerufene Oberflächenbewegung. Phys. Ztschr. Янв. 1907, стр. 33.

вать промежутки времени, необходимые для прохожденія сейсмической волной разстояній *HE* и *HS*, или можно наблюдать ослабленіе сейсмической энергіи въ зависимости отъ разстоянія. Въ послѣднемъ случаѣ предполагается, что сейсмическая энергія подвергается законамъ распространенія лучистой энергіи въ безконечной средѣ.

На основаніи такого предположенія совокупность разрушеній и поврежденій, происшедшихъ вслѣдствіе землетрясенія, можетъ дать относительную мѣру искомыхъ разстояній. «Сила» землетрясенія, насколько она непосредственно ощущается человѣкомъ и оцѣнивается баллами произвольной эмпирической шкалы, уподобляется яркости освѣщенія единицы площади на различныхъ разстояніяхъ отъ свѣтящейся точки.

§ 9. На этихъ соображеніяхъ основывается способъ Dutton'a[1]). Пусть I_0 обозначаетъ интенсивность землетрясенія на разстояніи 1 отъ очага. Предполагая, что наблюдаемая интенсивность мѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія, имѣемъ

$$I_s = \frac{I_0}{s^2} = \frac{I_0}{h^2 + \Delta^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

причемъ треугольникъ *HES* считается прямолинейнымъ. Интенсивность I убываетъ по мѣрѣ увеличенія Δ сначала быстро, потомъ медленнѣе, причемъ измѣненіе $\frac{dI}{d\Delta}$ проходитъ черезъ максимумъ. Этотъ максимумъ опредѣляется изъ формулы

$$\frac{d^2 I}{d\Delta^2} = \frac{8 I_0 \Delta^2 - 2 I_0 (h^2 + \Delta^2)}{(h^2 + \Delta^2)^3} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

откуда

$$\Delta_{max} = \frac{h}{\sqrt{3}}; \qquad I_{max} = \frac{3}{4}\frac{I_0}{h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Для очага землетрясенія въ Чарльстонѣ Dutton такимъ образомъ нашелъ глубину 12 англ. миль или 19 км.

Не трудно обнаружить недостатки этого способа. Не говоря о томъ, что понятіе объ интенсивности и опредѣленіе ея путемъ макросейсмическихъ наблюденій слишкомъ неопредѣленны, о чемъ мы въ дальнѣйшемъ будемъ распространяться еще подробнѣе, нужно главнымъ образомъ отмѣтить, что положеніе максимальнаго измѣненія интенсивности на практикѣ получается весьма неточно. Макросейсмическія наблюденія позволяютъ только довольно

---

[1]) C. E. Dutton. The Charleston Earthquake of August 31, 1886. U. S. Geolog. Survey. IX Ann. Rep. for 1887 — 1888. Washington 1889.

грубо оцѣнивать интенсивность, а первая или даже вторая производныя уже не могутъ быть опредѣлены безъ субъективнаго произвола. Кромѣ того, при сдѣланныхъ допущеніяхъ, поглощеніе сейсмической энергіи въ земной корѣ, обладающей безусловно неполной упругостью, вовсе не принимается въ разсчетъ. На основаніи сказаннаго понятно, что изложенный способъ среди сейсмологовъ мало распространился.

§ 10. Основательная переработка способа Dutton'a принадлежитъ Kövesligethy[1]) и его ученикамъ[2]). Этотъ сравнительно новый способъ состоитъ въ слѣдующемъ. Если энергія колебательнаго движенія убываетъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія, то максимальныя ускоренія Γ убываютъ обратно пропорціонально разстоянію, такъ что

$$\Gamma : \Gamma_0 = h : s, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

гдѣ Γ_0 — максимальное ускореніе въ эпицентрѣ. Принимая въ разсчетъ поглощеніе, получимъ

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{h}{s} e^{-\alpha (s-h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Для максимальныхъ ускореній Kövesligethy принималъ замѣчательную связь съ наблюденной «силой» или интенсивностью землетрясенія, опредѣленной по макросейсмическимъ даннымъ. Связь эту установилъ Cancani[3]), сравнивъ наблюденія силы съ соотвѣтствующими максимальными ускореніями по Omori. Онъ получилъ слѣдующее уравненіе, подтверждающее психофизическій законъ Фехнера:

$$G - G_e = 3 \log \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Здѣсь G обозначаетъ «силу», выраженную въ баллахъ, въ какой-нибудь точкѣ плейстосейстовой области, G_e представляетъ силу въ эпицентрѣ, а логариѳмы — натуральные.

---

[1]) R. de Kövesligethy. Seismonomia. Boll. della Soc. Sismol. Ital. XI, № 5 — 6. 1906.
Его-же. Seismischer Stärkegrad und Intensität der Beben. Beitr. zur Geoph. VIII, 1907.

[2]) Em. Jánosy. Bestimmung der Herdtiefe und des seismischen Absorptionskoeffizienten des Charlestoner Erdbebens. Boll. della Soc. Sismol. Ital. XI, № 5 — 6, стр. 251 — 255, 1907.
Z. de Vargha. Sur la profondeur du foyer et le coefficient d'absorption du tremblement de terre observé à Jókö le 10 janvier 1906. Boll. Soc. Sism. Ital. XII, № 3—4, стр. 101—104, 1907.
См. тоже изданіе: Die Erdbeben in Ungarn.

[3]) A. Cancani. Sur l'emploi d'une double échelle sismique des intensités, empirique et absolue. Verh. II Intern. Konf. Beitr. Geoph. Ergbd. II, стр. 281, 1904.

Изъ (10) и (11) получимъ

$$G_e - G = 3 \log . s + 3\alpha \log e (s - h) - 3 \log h = 3 \log \frac{s}{h} + 3\alpha M (s - h) \ldots . (12)$$

гдѣ $M = \log e = 0.4343$.

Положивъ, что

$$x = G_e + 3 \log h + 3\alpha M h; \qquad y = \alpha, \qquad b = 3Ms, \qquad n = G + 3 \log s$$

имѣемъ

$$x - by = n \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

Каждая изосейста представляетъ одно уравненіе типа (13) и совокупность ихъ рѣшается по способу наименьшихъ квадратовъ на основаніи нѣсколькихъ предположеній о величинѣ h путемъ послѣдовательныхъ приближеній. При этомъ поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Принимая для h какую-нибудь вѣроятную величину, вычисляютъ b и n, а затѣмъ рѣшаютъ систему уравненій (13). Зная x и y, вычисляютъ h изъ трансцендентнаго уравненія: $\frac{1}{3}(x - G_e) = \log h + \alpha M h$ путемъ приближеній, а съ найденной такимъ образомъ величиной h повторяютъ вычисленіе.

§ 11. Рѣшеніе уравненія (12) какъ показалъ Jánosy[1]), можетъ быть произведено нѣсколько инымъ способомъ, такъ что опредѣленіе G_e (силы въ эпицентрѣ) не входитъ. Этотъ способъ представляетъ нѣкоторое преимущество, такъ какъ эпицентръ опредѣляется только изъ совокупности всѣхъ наблюденій и G_0 непосредственно не наблюдается. Напишемъ въ самомъ дѣлѣ уравненіе (12) для двухъ какихъ-нибудь изосейстъ G_1 и G_2; тогда разность ихъ

$$G_1 - G_2 = 3 \log \frac{s_2}{s_1} + 3\alpha M (s_2 - s_1) \ldots \ldots \ldots (14)$$

даетъ

$$\alpha = \frac{\frac{1}{3}(G_1 - G_2) + \log s_1 - \log s_2}{M (s_2 - s_1)} \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Изъ имѣющихся изосейстъ составляютъ всѣ возможныя комбинаціи $G_1 - G_2$ такъ, чтобы разность эта имѣла по возможности большую величину, вычисляютъ α изъ всѣхъ этихъ комбинацій и опредѣляютъ отклоненія отдѣльныхъ величинъ α отъ средняго. Эти очень простыя вычисленія произ-

---

[1]) См. напр. Die Erdbeben in Ungarn im Jahre 1906.

водятся для нѣкотораго числа произвольно принятыхъ значеній h. То значеніе h, для котораго сумма квадратовъ отклоненій величинъ α отъ средняго окажется наименьшей, и будетъ искомая глубина. Она опредѣляется по графикѣ. Затѣмъ сила G_e въ эпицентрѣ получается изъ m имѣющихся изосейстъ по формуламъ:

$$g_i = 3 \log \frac{s_i}{h} + 3\alpha M (s_i - h) \quad \text{и} \quad G_e = \frac{1}{m}(\Sigma G + \Sigma g_i) \ldots . (16)$$

По способу Kövesligethy вычислялись уже нѣкоторыя землетрясенія. Для землетрясенія въ Чарльстонѣ, для котораго Dutton своимъ способомъ нашелъ $h = 19$ км., Jánosy вычислилъ $h = 66$ км., $\alpha = 0.0027$; по видоизмѣненному-же имъ способу онъ нашелъ $h = 102$ км. и $\alpha = 0.0041$. Для нѣсколькихъ венгерскихъ землетрясеній для h были найдены величины отъ 5 до 10 км. и для α отъ 0.02 до 0.05.

§ 12. Противъ приведеннаго способа можно сдѣлать слѣдующія возраженія.

Первое изъ нихъ касается кажущейся точности способа Kövesligethy, которая особенно рельефно выступаетъ на одномъ изъ первыхъ-же примѣровъ, вычисленныхъ этимъ способомъ. Принимая для эпицентра землетрясенія въ Чарльстонѣ опредѣленную Dutton'омъ силу 10, Jánosy[1]) по способу Kövesligethy нашелъ слѣдующія разности между вычисленной силой G_c и наблюденной G_0:

G_c	G_0	$G_0 - G_c$
2.39	2	— 0.39
2.97	3	+ 0.03
3.94	4	+ 0.06
4.75	5	+ 0.25
5.68	6	+ 0.32
6.80	7	+ 0.20
8.00	8	+ 0.00
9.45	9	— 0.45
10.	10	0.00

[1]) Jánosy. Bestimmung der Herdtiefe etc. Boll. Soc. Sism. It. XI, № 5 — 6, стр. 254.

Этому вычисленію соотвѣтствовало $h = 66$ км. $\alpha = 0.0023$. По способу-же Jánosy, по которому для силы въ эпицентрѣ не требуется никакого спеціальнаго допущенія, получилась слѣдующая таблица:

G_c	G_0	$G_0 - G_c$
2.32	2	— 0.32
2.94	3	+ 0.06
3.98	4	+ 0.02
4.84	5	+ 0.16
5.82	6	+ 0.18
6.97	7	+ 0.03
8.16	8	— 0.16
9.34	9	— 0.34
9.64	10	+ 0.36

При этомъ $h = 102$ км., $\alpha = 0.0041$.

Вторая глубина почти вдвое больше первой, между тѣмъ какъ разности $G_0 - G_c$ въ обоихъ случаяхъ приблизительно одинаковой величины и нерѣдко значительно меньше допустимыхъ ошибокъ наблюденныхъ величинъ G_0, соотвѣтствующихъ данному разстоянію Δ.

Въ разсматриваемомъ случаѣ изосейсты впрочемъ довольно близко представляютъ окружности, такъ что разстояніе Δ, соотвѣтствующее данному баллу G, опредѣляется сравнительно точно. Въ большинствѣ-же случаевъ изосейсты имѣютъ довольно неправильную форму и тогда точное опредѣленіе величинъ Δ почти невозможно. Для доказательства разсмотримъ землетрясеніе въ Észak-Erdély 1885 г., для котораго Réthly[1]) по способу Jánosy нашелъ слѣдующія величины.

$G_0 =$	3	4	5	6	7.5	$h = 5$ km.
$G_c - G_0 =$	+ 0.22	— 0.20	— 0.09	+ 0.12	— 0.07	$a = 0.022$

Основаніемъ вычисленія служили слѣдующія разстоянія Δ, соотвѣтствующія отдѣльнымъ изосейстамъ:

$G_0 =$	3	4	5	6	7.5
$\Delta =$	61.8	50.5	32.1	17.0	6.2 km.

[1]) A. Réthly. Die Erdbeben in Ungarn im Jahre 1907, стр. 29 — 41.

Измѣненію силы на $\delta G = 0.2$ балла соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, измѣненіе разстоянія на $\delta\Delta = 3$ km. Приведенныя-же разстоянія получены какъ среднее изъ не очень большого числа отдѣльныхъ измѣреній, колеблющихся напр. для балла 4 между 21 km. и 75 km!

Изъ сказаннаго выводимъ заключеніе, что подкупающее согласіе вычисленныхъ и наблюденныхъ балловъ ничего не доказываетъ относительно точности полученныхъ глубинъ. Легкое видоизмѣненіе изосейстъ, вполнѣ согласное съ макросейсмическими данными, значительно измѣнило бы опредѣляемую глубину. Признавая даже всѣ предположенія разбираемаго способа вѣрными, нужно сознаться, что имъ опредѣляется только первое грубое приближеніе порядка искомой величины. Для увеличенія точности необходимо, значительно улучшить макросейсмическія наблюденія, по возможности путемъ инструментальныхъ измѣреній. Поэтому всякую попытку въ этомъ направленіи слѣдуетъ привѣтствовать съ живѣйшимъ сочувствіемъ [1]).

§ 13. Другое замѣчаніе касается коэффиціента поглощенія α.

Изъ 6 венгерскихъ землетрясеній [2]) были выведены слѣдующія среднія величины:

$$h = 7.5 \text{ km.}, \qquad \alpha = 0.032.$$

Для двухъ землетрясеній [3]) — въ Индіи 12 іюня 1897 и въ Чарльстонѣ 31 авг. 1886 — получилось въ среднемъ:

$$h = 136 \text{ km.}, \qquad \alpha = 0.0040.$$

Съ другой стороны коэффиціентъ поглощенія можно вывести и изъ сравненія амплитудъ длинныхъ волнъ, дошедшихъ до сейсмической станціи по прямому пути и черезъ антиэпицентръ (т. н. волны W_2).

Этимъ путемъ Angenheister [3]) нашелъ въ среднемъ для шести землетрясеній

$$\alpha = 0.00026.$$

Князь Б. Б. Голицынъ [4]) такимъ-же путемъ вычислилъ для большого

---

[1]) Fürst B. Galitzin (Golicyn). Über eine dynamische Skala zur Schätzung von makroseismischen Bewegungen. Изв. Пост. Центр. Сейсм. Ком. IV, 3. 1911.

[2]) A. Réthly. Die Erdbeben in Ungarn im Jahre 1907, стр. 41.

[3]) G. Angenheister. Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption der Erdbebenwellen etc. Nachr. K. Ges. Göttingen. 1906.

[4]) Fürst B. Galitzin (Golicyn). Das Sicilianische Erdbeben am 28. Dez. 1908 etc. Изв. Имп. Акад. Наукъ 1909, стр. 297.

землетрясенія въ Сициліи 28 дек. 1908 г.

$$\alpha = 0.00027.$$

Z. de Vargha[1]) объясняетъ коренное различіе приведенныхъ величинъ α тѣмъ, что бо́льшей длинѣ волны соотвѣтствуетъ меньшій коэффиціентъ поглощенія, такъ какъ неоднородности среды разсѣиваютъ энергію движенія главнымъ образомъ такихъ волнъ, длина которыхъ одинаковаго порядка съ размѣрами разнородныхъ частицъ. Признавая правильность такого взгляда, нужно также имѣть въ виду, что разнородности встрѣчаются главнымъ образомъ вблизи поверхности земли, между тѣмъ какъ внутреннее ядро повидимому вполнѣ однородно. Коэффиціентъ поглощенія долженъ быть функціей глубины и на основаніи приведенныхъ чиселъ можно подозрѣвать, что онъ весьма быстро варіируетъ съ измѣненіемъ глубины. Слѣдовательно, нужно въ формулахъ для опредѣленія глубины очага учесть вліяніе этой измѣнчивости, или доказать, что гипотеза постоянной средней величины α для даннаго землетрясенія существенно не вліяетъ на результатъ.

§ 14. Третье и главное возраженіе сводится къ тому, что было уже сказано по поводу зоны максимальнаго разрушенія Mallet'a. Является вопросъ, вся-ли сейсмическая энергія, ощущаемая въ точкѣ S, доходитъ до этой точки по пути HS?

Мы знаемъ, что длинныя волны, всегда встрѣчающіяся на сейсмограммахъ — правда, болѣе отдаленныхъ отъ эпицентра станцій, — распространяются въ общемъ параллельно ES, причемъ области длинныхъ волнъ принадлежитъ максимумъ смѣщенія почвы, а макросейсмическія наблюденія, съ своей стороны, соотвѣтствуютъ максимальному ускоренію движенія почвы. Обѣ эти фазы могутъ совпасть или нѣтъ, смотря по періоду колебаній.

Въ настоящее время происхожденіе длинныхъ волнъ еще недостаточно выяснено, а характеръ движеній, распространяющихся въ плейстосейстовыхъ областяхъ вдоль земной поверхности, еще менѣе извѣстенъ, такъ что при нынѣшнемъ состояніи нашихъ познаній ничего достовѣрнаго нельзя сказать ни за, ни противъ гипотезы, что макросейсмическіе эффекты происходятъ исключительно отъ движеній, распространяющихся по траекторіи HS. Но по всей вѣроятности движенія почвы въ плейстосейстовой области представляютъ результатъ интерференціи волнообразныхъ колебаній разныхъ

---

[1]) Z. de Vargha. Sur la profondeur du foyer et le coefficient d'absorption etc. Boll. Soc. Sism. Ital. XII, № 3 — 4, 1907, стр. 101 — 105.

категорій въ зависимости отъ сложнаго строенія наружныхъ сзоевъ земли. Поэтому основная гипотеза разсматриваемаго способа является по меньшей мѣрѣ рискованной и глубины, полученныя до сихъ поръ способомъ Kövesligethy, представляютъ *пока* только результатъ вычисленія.

Совсѣмъ иное дѣло было бы, если бы подвергать вычисленію по этому способу амплитуды истиннаго движенія почвы, получаемыя точными сейсмометрами. Въ такомъ случаѣ можно ограничиться амплитудами предварительной фазы, во время которой движеніе дѣйствительно распространяется по траекторіи *HS*.

Выходитъ, слѣдовательно, что слабая сторона способа Kövesligethy и другихъ вышеприведенныхъ способовъ состоитъ главнымъ образомъ въ томъ, что они основаны на использованіи макросейсмическихъ данныхъ, которыя съ точки зрѣнія строгой критики слишкомъ несовершенны, чтобы допускать какіе-либо точные выводы.

§ 15. Остальныя возраженія, которыя можно сдѣлать противъ способа Kövesligethy касаются уже мелкихъ подробностей формулъ. Множитель 3 напр. въ формулѣ (11) выведенъ на основаніи одной работы Cancani[1]), который съ своей стороны использовалъ только работу Omori[2]), основанную на ограниченномъ числѣ японскихъ наблюденій. Очень возможно, что болѣе подробныя изслѣдованія, основанныя на макросейсмическихъ наблюденіяхъ въ странахъ съ европейской культурой, нѣсколько видоизмѣнили-бы этотъ множитель.

Наконецъ слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что необходимая для составленія уравненій (13), (14), (15) и (16) величина s вычислителями опредѣлялась просто по формулѣ:

$$s = \sqrt{h^2 + \overline{ES}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Учесть вліяніе кривизны земной поверхности — конечно очень просто. О вліяніи-же кривизны сейсмическаго луча въ приведенныхъ работахъ ничего не говорится; на сколько эта кривизна можетъ измѣнить результатъ — пока неизвѣстно.

§ 16. Разсмотримъ теперь методы опредѣленія глубины очага землетрясенія, основанные на наблюденіи моментовъ наступленія движенія въ точкахъ E и S.

---

[1]) A. Cancani. Sur l'emploi d'une double échelle sismique etc. Beitr. Geophys. Ergänzbd. II, стр. 281. 1904.

[2]) F. Omori. Note on applied Seismology. Beitr. Geophys. Ergbd. I стр. 335. 1902.

Для рѣшенія задачи необходимо сдѣлать какія-либо предположенія о скорости распространенія сейсмическихъ волнъ внутри земли. Простѣйшая гипотеза, очевидно, — допущеніе постоянной скорости c, вслѣдствіе чего сейсмическій лучъ HS долженъ быть прямой. Скорость c представляетъ новую неизвѣстную, входящую въ уравненія.

v. Seebach[1]) первый предложилъ этотъ способъ и опубликовалъ слѣдующее рѣшеніе задачи. Пусть будетъ t время, необходимое для прохожденія пути HS, тогда

$$s = ct \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

и треугольникъ OHS даетъ

$$c^2 t^2 = R^2 + (R-h)^2 - 2R(R-h)\cos\vartheta = h^2 + 4R(R-h)\sin^2\frac{\vartheta}{2} \ldots . (19)$$

Обозначая хорду ES буквою σ, имѣемъ

$$\frac{c^2}{h^2}t^2 - \frac{1-\frac{h}{R}}{h^2}\sigma^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Это уравненіе, въ которомъ t и σ являются перемѣнными величинами, представляетъ гиперболу. Ее можно сконструировать по наблюденнымъ въ различныхъ точкахъ S моментамъ наступленій τ, имѣя въ виду, что $\tau - t$ для даннаго землетрясенія постоянная величина. Вершина гиперболы соотвѣтствуетъ моменту τ_0 — т.-е. моменту наступленія сотрясенія въ эпицентрѣ, который обыкновенно не наблюдается. Онъ опредѣляется, слѣдовательно, путемъ графической экстраполяціи. Положеніе эпицентра, необходимое для вычисленій разстояній σ, опредѣляется предварительно изъ макросейсмическихъ наблюденій.

§ 17. Дальнѣйшее развитіе способа v. Seebach'a представляетъ рядъ неточностей и недоразумѣній математическаго характера, допущенныхъ сейсмологами старой школы. Такъ какъ эти недоразумѣнія воспроизведены еще у S. Günther'a[2]) во второмъ изданіи его извѣстнаго «Handbuch», изъ котораго мы заимствуемъ изложеніе способа v. Seebach'a, то мы считаемъ долгомъ остановиться на этихъ вопросахъ немного подробнѣе.

По нахожденію момента τ_0 обыкновенно опредѣляли промежутки времени t просто какъ разности $\tau - \tau_0$, т.-е. принимали, что τ_0 равняется мо-

---

[1]) v. Seebach. Das mitteldeutsche Erdbeben vom 6. März 1872. Leipzig 1873.

[2]) S. Günther. Handbuch der Geophysik. 2 Aufl. Stuttgart 1897, стр. 469 — 474.

менту наступленія сотрясенія x въ точкѣ H. Промежуткомъ времени

$$t_0 = \frac{h}{c}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

слѣдовательно, просто пренебрегали. При такихъ допущеніяхъ двѣ какія-нибудь точки гиперболы (20) — t_1, σ_1 и t_2, σ_2 — опредѣляютъ искомыя неизвѣстныя h и c. Если при этомъ еще пренебречь малой величиной $\frac{h}{R}$ противъ 1, что очевидно вполнѣ возможно, то получаются весьма простыя формулы:

$$h = \sqrt{\frac{t_1^2 \sigma_2^2 - t_2^2 \sigma_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}; \qquad c = \sqrt{\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{t_2^2 - t_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Въ этихъ формулахъ еще нерѣдко замѣняли хорды σ соотвѣтствующими сферическими разстояніями Δ. Это конечно возможно при небольшихъ эпицентральныхъ разстояніяхъ; при дальнѣйшемъ-же продолженіи кривой (20) эта подстановка служила поводомъ къ своеобразному недоразумѣнію.

Оказалось, что кривая эта, называвшаяся нерѣдко «годографомъ» и представляющая зависимость моментовъ τ отъ разстояній Δ или соотвѣтствующихъ угловъ ϑ, вовсе не есть гипербола, а представляетъ кривую, вогнутую по направленію къ мнимой оси требуемой гиперболы на нѣсколько большемъ разстояніи отъ эпицентра. Не далеко отъ этой точки иногда удавалось замѣтить точку перегиба, представляющую переходъ въ требуемую гиперболу. Этотъ своеобразный характеръ «годографа» или «кривой пробѣга» по новѣйшей терминологіи, еще Günther'омъ объясняется сложнымъ характеромъ распространенія сейсмическихъ волнъ и еще Faidiga[1]) старается изъ опредѣленной имъ точки перегиба вывести нѣкоторый верхній предѣлъ для искомой глубины, пользуясь какими-то неясными геометрическими разсужденіями.

§ 18. Легко видѣть, что даже при допущеніи постоянной скорости c такая точка перегиба непремѣнно существуетъ и что точное опредѣленіе положенія ея непосредственно ведетъ къ выводу искомой глубины очага.

Для этого напишемъ формулу (19) въ видѣ:

$$t = \frac{\sqrt{R^2 + (R-h)^2 - 2R(R-h)\cos\vartheta}}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

---

[1]) A. Faidiga. Das Erdbeben von Sinj am 2. Juli 1898. Mitt. d. Erdbeben-Komm. in Wien. N. F. № 17. Wien 1903, стр. 125.

Замѣчая, что

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{d\tau}{d\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

найдемъ

$$\frac{d\tau}{d\vartheta} = \frac{R(R-h)\sin\vartheta}{c\sqrt{R^2+(R-h)^2-2R(R-h)\cos\vartheta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Эта величина всегда положительна, такъ какъ корень представляетъ положительную и дѣйствительную длину s. Въ эпицентрѣ и въ анти-эпицентрѣ $\frac{d\tau}{d\vartheta}$ обращается въ нуль: кривая параллельна оси ϑ. Изъ (25) найдемъ далѣе:

$$\frac{d^2\tau}{d\vartheta^2} = \frac{R(R-h)}{c} \cdot \frac{[R^2+(R-h)^2]\cos\vartheta - R(R-h)\cos^2\vartheta - R(R-h)}{[R^2+(R-h)^2-2R(R-h)\cos\vartheta]^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots (26)$$

Знаменатель этой дроби всегда > 0. Приравнявъ числитель нулю, найдемъ

$$\cos\vartheta = \frac{R^2 - hR + \frac{h^2}{2} \pm h\left(R - \frac{h}{2}\right)}{R(R-h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Верхній знакъ соотвѣтствуетъ мнимому корню $\cos\vartheta = \frac{R}{R-h}$.

Нижній-же знакъ опредѣляетъ уголъ ϑ_0, соотвѣтствующій точкѣ перегиба кривой пробѣга:

$$\cos\vartheta_0 = \frac{R-h}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Изъ чертежа видно, что уголъ ϑ_0 равняется углу EOX. Минимумъ видимой поверхностной скорости $1 : \frac{d\tau}{d\vartheta}$ соотвѣтствуетъ точкѣ, въ которой лучъ перпендикулярный къ оси OE встрѣчаетъ поверхность земли.

Между эпицентромъ и точкой ϑ_0 выраженіе (26) положительно, за этой точкой оно отрицательно, такъ что вышеописанная особенность кривой пробѣга доказана.

§ 19. Формула (28) позволяетъ непосредственно опредѣлить глубину очага землетрясенія. Мы получимъ

$$h = R(1 - \cos\vartheta_0) = 2R\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Принимая радіусъ земли равнымъ радіусу шара одинаковаго съ эллипсоидомъ Бесселя объема, т.-е. $R = 6370$ км., получимъ слѣдующую табличку.

ϑ_0	Δ_0	h
1°	111 км.	1.0 км.
2°	222	3.9
3°	334	8.7
4°	445	15.5
5°	556	24.3
6°	667	34.9
7°	778	47.5
8°	889	62.0
9°	1001	78.4

Нужно удивляться, что простая зависимость, выраженная формулой (29), не привлекала на себя вниманія сейсмологовъ. Faidiga[1]) напр., опредѣливъ точку перегиба своего годографа на разстояніи $\Delta_0 = 390$ км., вычисляетъ изъ разныхъ комбинацій станцій глубины, варіирующія отъ 214 км. до 43 км., а между тѣмъ одного взгляда на вышеприведенную табличку достаточно, чтобы найти $h = 12.6$ км.

Только сравнительно недавно G. B. Rizzo[2]) высказалъ предположеніе, что высота сферическаго сегмента, ограниченнаго поясомъ наименьшей поверхностной или видимой скорости, равняется глубинѣ очага землетрясенія. Никакихъ строгихъ доказательствъ онъ, однако, для подтвержденія своего «предположенія» не приводилъ. Поэтому идея Rizzo и не привлекала на себя вниманія.

Замѣтимъ еще, что въ случаѣ $h = 0$ формулы (23), (25) и (26) переходятъ въ слѣдующія:

$$t = 2\frac{R}{c}\sin\frac{\vartheta}{2}; \qquad \frac{dt}{d\vartheta} = \frac{R}{c}\cos\frac{\vartheta}{2}; \qquad \frac{d^2t}{d\vartheta^2} = -\frac{1}{2}\frac{R}{c}\sin\frac{\vartheta}{2} \ldots . (30)$$

такъ что въ этомъ случаѣ нѣтъ точки перегиба и кривая пробѣга обращена къ оси ϑ или Δ всегда вогнутой стороной.

§ 20. Опытъ показалъ, что кривая пробѣга, по крайней мѣрѣ начиная съ разстоянія $\Delta = 1000$ км., всегда представляется вогнутой къ оси Δ. Съ

---

[1]) Faidiga. l. c. стр. 125.

[2]) G. B. Rizzo. Sopra il calcolo della profondità degli ipocentri nei movimenti sismici. Atti R. Acad. delle Scienze di Torino. T. 41, 1906, стр. 1061—1066.

другой стороны изъ точекъ, лежащихъ очень близко къ эпицентру, болѣе или менѣе точныя наблюденія наступленія моментовъ сотрясенія обыкновенно не получаются. Нужно, слѣдовательно, считаться съ глубинами, не превышающими нѣсколькихъ десятковъ километровъ, и съ разстояніями Δ или σ, равными нѣсколькимъ сотнямъ километровъ. Порядокъ величины отношенія $\frac{h}{\sigma}$ будетъ, слѣдовательно, около $\frac{1}{10}$ и лишь въ рѣдкихъ случаяхъ можетъ быть нѣсколько больше. Формула (20), если пренебречь малой величиной $\frac{h}{R}$, можетъ быть написана въ такомъ видѣ[1]):

$$t = \frac{1}{c}\sqrt{\sigma^2 + h^2} = \frac{\sigma}{c}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 - \cdots\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

Такъ какъ t не больше 100 — 200 секундъ, то опредѣленіе глубины очага возможно только при точности моментовъ наступленія сотрясенія до немногихъ секундъ.

v. Seebach и другіе сейсмологи, примѣнявшіе въ прошломъ столѣтіи изложенный способъ, могли воспользоваться только макросейсмическими данными, обладающими только точностью до нѣсколькихъ минутъ. Поэтому всѣ глубины, вычисленныя этимъ способомъ и колебавшіяся въ предѣлахъ нѣсколькихъ десятковъ километровъ[2]), представляютъ совершенно произвольныя числа. Кривая пробѣга, опубликованная Faidiga[3]) для землетрясенія 2 іюля 1898 г., съ точки зрѣнія современнаго сейсмолога, должна также считаться недѣйствительной.

Въ настоящее время уже имѣются въ нѣкоторыхъ странахъ, подверженныхъ частымъ землетрясеніямъ, сѣти сейсмометрическихъ станцій, — правда, еще малочисленныя, — которыя позволяютъ опредѣленіе временъ землетрясеній съ точностью до немногихъ секундъ. Задача опредѣленія глубинъ поэтому уже не можетъ считаться вполнѣ безнадежной.

§ 21. Основное предположеніе способа v. Seebach'a — допущеніе постоянной скорости c — встрѣтило возраженія со стороны Aug. Schmidt'a[4]). Его работа, хотя и трудно доступная, тѣмъ не менѣе приводится въ многочисленныхъ монографіяхъ и курсахъ, посвященныхъ затрагиваемымъ ею вопросамъ. По мнѣнію Schmidt'a скорость распространенія сейсмическихъ колебаній внутри земли не можетъ быть постоянна, а

---

1) C. G. Knott. The Physics of Earthquake Phenomena. Oxford 1908, стр. 35.

2) R. Hoernes. Erdbebenkunde. Leipzig 1893, стр. 59.

3) A. Faidiga. l. c.

4) Aug. Schmidt. Wellenbewegung und Erdbeben. Jahresh. d. Vereins f. vaterl. Naturk. in Württemberg. 44 Jahrg. 1888, стр. 248. Мнѣ не доступно.

представляетъ вообще функцію разстоянія отъ центра земли, такъ что сейсмическіе лучи не прямыя линіи, а кривыя. Правильность этого взгляда въ настоящее время признается всѣми.

Для опредѣленія глубины очага, однако, Schmidt, повидимому, не вырабатывалъ законченныхъ методовъ. Онъ только предполагалъ, что радіусъ круга, проложеннаго около эпицентра, черезъ точки наименьшей «видимой» или «поверхностной» скорости, долженъ быть непремѣнно больше глубины очага. Другой предѣлъ для искомой глубины Schmidt опредѣлялъ слѣдующимъ образомъ. Онъ проводилъ въ точкѣ перегиба кривой пробѣга касательную и опредѣлялъ точку встрѣчи этой касательной съ осью t. Соотвѣтствующій полученному отрѣзку промежутокъ времени, помноженный на минимальную поверхностную скорость, и представляетъ, по мнѣнію Schmidt'a, нижній предѣлъ искомой глубины.

Нѣтъ надобности войти въ критику этихъ предположеній, не приводящихъ къ окончательнымъ выводамъ. Примѣры невѣроятно большихъ глубинъ, опредѣляемыхъ этимъ путемъ, находятся въ приведенныхъ уже работахъ Faidiga и Rizzo. Однако, мысль Schmidt'a, использовать ту или другую выдающуюся точку кривой пробѣга для опредѣленія глубины очага, получила дальнѣйшее, болѣе строгое развитіе.

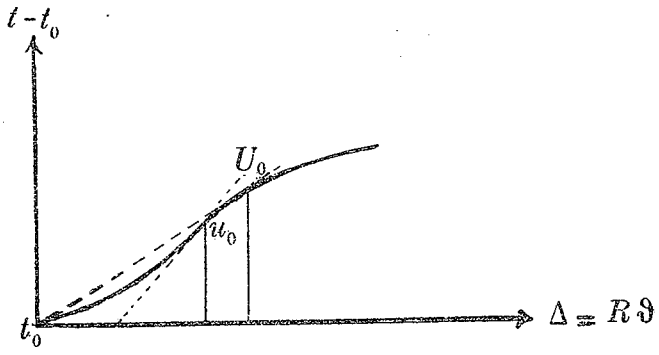
Анализъ свойствъ точки перегиба, напр., при допущеніи постоянной скорости c привелъ насъ къ формуламъ (28) и (29) и мы видѣли, что предложеніе Rizzo по существу сводится къ этимъ формуламъ. Существуетъ еще другой подобный способъ, къ изложенію котораго мы и обратимся.

§ 22. Во избѣжаніе недоразумѣній замѣтимъ предварительно, что терминъ «видимая» или «поверхностная» скорость различными авторами понимается въ различномъ смыслѣ. Нѣкоторые авторы, въ томъ числѣ Wiechert[1]), опредѣляютъ «поверхностную» скорость къ данной точкѣ поверхности земли какъ значеніе производной $\frac{d\Delta}{dt}$ въ этой точкѣ. Будемъ обозначать эту скорость буквою u. Она достигаетъ минимума — u_0 — въ точкѣ перегиба кривой пробѣга. Другіе авторы понимаютъ поверхностную скорость какъ частное $\frac{\Delta}{t-t_0}$, т.-е. какъ эпицентральное разстояніе, раздѣленное на время, протекшее съ момента наступленія сотрясенія въ эпицентрѣ. Эту скорость мы будемъ обозначать буквою U. Она также проходитъ черезъ минимумъ (U_0). Послѣдній наблюдается въ той точкѣ кривой пробѣга (см. черт. 2), въ которой прямая, соединяющая ее съ началомъ координатъ, становится каса-

---

[1]) E. Wiechert u. Zoeppritz. Über Erdbebenwellen. Nachr. K. Ges. Göttingen. 1907, стр. 64.

Черт. 2.



тельной кривой, т.-е. въ точкѣ, для которой:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\vartheta}{t - t_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

И эта точка можетъ быть использована для опредѣленія глубины очага землетрясенія. Такую попытку сдѣлалъ Rudzki. Онъ выработалъ общую теорію криволинейныхъ сейсмическихъ лучей[1]) и нашелъ условіе, равносильное уравненію (32). Это условіе онъ выразилъ въ видѣ алгебраической суммы трехъ опредѣленныхъ интеграловъ, распространенныхъ отъ очага до точки U_0 на земной поверхности; сумма эта должна равняться нулю. Изъ этого общаго условія Rudzki вывелъ потомъ спеціальныя формулы[2]), соотвѣтствующія допущенію v. Seebach'a постоянной скорости c, пользуясь обстоятельствомъ, что въ этомъ случаѣ уравненія значительно упрощаются. При этомъ Руцкимъ допущена несущественная, впрочемъ, неточность формальнаго характера: чертежъ и обозначеніе интеграловъ составлены такъ, какъ будто точка U_0 находится между эпицентромъ и точкой u_0, т.-е. въ такъ называемой «внутренней области», между тѣмъ какъ она на самомъ дѣлѣ находится за точкой u_0 во «внѣшней области».

§ 23. Доказательство Руцкаго, на основаніи уже приведенныхъ формулъ, можетъ быть нѣсколько упрощено. Сокращенное доказательство состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть U_0 (черт. 3) обозначаетъ точку, въ которой наблюдается скорость U_0 и пусть γ обозначаетъ соотвѣтствующій центральный уголъ. Уголъ EU_0H обозначимъ буквою ε. Подставивъ въ формулу (32)

---

[1]) M. P. Rudzki. Über die scheinbare Geschwindigkeit der Verbreitung der Erdbeben. Beitr. Geophys. III, стр. 495. 1898.

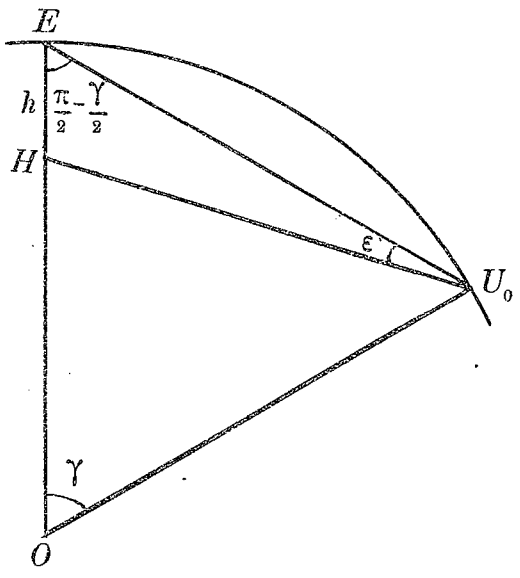
[2]) M. P. Rudzki. Über die Tiefe des Herdes des calabrischen Erdbebens vom 8, Sept. 1905. Bull. Acad. des Sciences de Cracovie. Janvier 1907.

уравненія (21), (23) и (25) и замѣняя уголъ ϑ угломъ γ, найдемъ:

$$\frac{R(R-h)\sin\gamma}{c\sqrt{R^2+(R-h)^2-2R(R-h)\cos\gamma}}=\frac{\sqrt{R^2+(R-h)^2-2R(R-h)\cos\gamma}-h}{c\gamma}\ldots(33)$$

Замѣтимъ, что неизвѣстная скорость c въ уравненіи (33) сокращается. Она, слѣдовательно, не входитъ въ условіе Руцкаго, какъ она и не вошла въ уравненіе (29). Обѣ точки u_0 и U_0 не зависятъ, слѣдовательно, отъ абсолютной величины скорости c. Обозначая для сокращенія разстояніе HU_0 буквою s, замѣтимъ, что

Черт. 3.



$$s=\sqrt{R^2+(R-h)^2-2R(R-h)\cos\gamma}\ldots(34)$$

и формула (33) короче пишется такъ:

$$R^2\gamma\sin\gamma-Rh\gamma\sin\gamma=s^2-hs\ldots(35)$$

Для величинъ h и s введемъ слѣдующія выраженія, получаемыя изъ треугольника EHU_0:

$$s=\frac{2R\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\left(\frac{1}{2}\gamma-\varepsilon\right)}=\frac{R\sin\gamma}{\cos\left(\frac{1}{2}\gamma-\varepsilon\right)},\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

$$h=\frac{2R\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\varepsilon}{\cos\left(\frac{1}{2}\gamma-\varepsilon\right)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(37)$$

Тогда уравненіе (35), послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій, переходитъ въ формулу, найденную Руцкимъ:

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\left(\frac{1}{2}\gamma-\varepsilon\right)}-\gamma\cos\left(\frac{1}{2}\gamma+\varepsilon\right)-\frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\varepsilon}{\cos\left(\frac{1}{2}\gamma-\varepsilon\right)}=0\ldots\ldots(38)$$

Руцкій пишетъ эту формулу еще въ такомъ видѣ:

$$\left(\cos\frac{1}{2}\gamma-\sin\varepsilon\right)\left[\gamma\left(\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\varepsilon\right)-2\sin\frac{1}{2}\gamma\right]=0\ldots\ldots(39)$$

Если приравнять нулю первый множитель, то получится, какъ очагъ землетрясенія, центръ земли. Второй корень уравненія (39) даетъ искомое рѣшеніе задачи:

$$\sin\varepsilon = \frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma}{\gamma} - \cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{\gamma^2}{12} - \frac{\gamma^4}{480} + \cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

Изъ этой формулы вычисляется ε, а затѣмъ, помощью формулы (37), опредѣляется h. Такимъ образомъ получена слѣдующая табличка:

γ	Δ	h
6°	667 км.	0.6 км.
8	889	1.5
10	1112	2.8
12	1334	4.9
14	1557	7.8
16	1779	11.6
18	2001	16.5
20	2224	22.8
22	2446	30.4
24	2668	39.5

Одного взгляда на приведенную табличку достаточно, чтобы опредѣлить искомую глубину, если извѣстна точка U_0 или уголъ γ на основаніи кривой пробѣга. При этомъ, однако, предполагается, что скорость c постоянна.

Кривая пробѣга обладаетъ, слѣдовательно, двумя точками — u_0 и U_0 — позволяющими опредѣлить глубину очага при сдѣланныхъ допущеніяхъ. Къ первой изъ нихъ относится формула (29), ко второй — формулы (40) и (37).

§ 24. Сравнивая относительныя преимущества обоихъ способовъ, нужно прежде всего отмѣтить то обстоятельство, что кривая пробѣга отличается вообще слабой кривизной, такъ что построеніе касательной въ точкѣ U_0 во всякомъ случаѣ не точнѣе, чѣмъ нахожденіе точки перегиба. Въ этомъ отношеніи едва-ли можно дать нѣкоторое преимущество тому или другому способу. Но существуетъ другое обстоятельство, говорящее не въ пользу

примѣненія точки U_0. Для нахожденія этой точки нужно знать начальную точку кривой пробѣга, т.-е. время наступленія землетрясенія въ эпицентрѣ, а этотъ моментъ, вообще говоря, не наблюдается, а получается только путемъ большей или меньшей экстраполяціи помощью той-же кривой пробѣга. Точка-же перегиба опредѣляется независимо отъ всякаго предположенія этого рода.

Весьма существенный недостатокъ, однако, является общимъ для обоихъ способовъ. Выводъ формулъ (29), (37) и (40) основанъ на гипотезѣ постоянной скорости распространенія сейсмическихъ колебаній, т.-е. на гипотезѣ, неточность которой въ настоящее время не подлежитъ никакому сомнѣнію. Насколько кривизна сейсмическихъ лучей можетъ повліять на результаты, получаемые на основаніи приведенныхъ формулъ, пока неизвѣстно. Руцкій говоритъ, въ концѣ своей работы, что глубина очага, въ случаѣ кривыхъ сейсмическихъ лучей, получилась-бы «wahrscheinlich etwas grösser», чѣмъ по формуламъ (37) и (40). Мы увидимъ въ дальнѣйшемъ, что на основаніи имѣющихся данныхъ, глубина эта должна быть увеличена приблизительно въ 20 разъ! Числа, полученныя по формулѣ (29), должны быть соотвѣтственно увеличены въ 5 разъ.

Вслѣдствіе этихъ обстоятельствъ, глубины, вычисленныя для даннаго землетрясенія, на основаніи точекъ u_0 и U_0, вообще говоря, не совпадутъ и такое разногласіе могло-бы служить прямымъ доказательствомъ перемѣнной скорости распространенія сейсмическихъ волнъ внутри земли. Но тутъ приходится считаться еще съ другимъ обстоятельствомъ. Кривая пробѣга, проведенная отъ руки по сравнительно малочисленнымъ и при томъ болѣе или менѣе ошибочнымъ наблюденіямъ, до нѣкоторой степени произвольна. Кривизну ея можно видоизмѣнить, не выходя изъ предѣловъ, указанныхъ наблюденіями, на столько, что согласіе или несогласіе результатовъ, получаемыхъ на основаніи точекъ u_0 и U_0, едва-ли представляетъ вѣскій аргументъ въ пользу той или другой гипотезы.

§ 25. Пояснимъ это на примѣрѣ, приведенномъ Руцкимъ для объясненія своего метода, т.-е. на землетрясеніи 8-го сентября 1905 г., для котораго Rizzo[1]) опубликовалъ тщательное сопоставленіе имѣющихся наблюденій и вычертилъ кривую пробѣга. Для этой кривой точка Руцкаго находится на разстояніи 1500 км. отъ эпицентра. По формуламъ (40) и (37) получается, слѣдовательно, глубина $h = 7$ км. Точка-же перегиба находится на эпицентральномъ разстояніи 800 км., что, по формулѣ (29), соот-

[1]) G. B. Rizzo. Sulla velocitá di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria. Mem. R. Acad. delle Scienze di Torino, (II), t. 57, стр. 309—350.

вѣтствуетъ глубинѣ 50 км. Разсматривая графику Rizzo, можно, однако, замѣтить, что, на разстояніи отъ 0 до 500 км., всѣ точки наблюденія лежатъ выше кривой, на разстояніяхъ-же отъ 1000 до 1600 км. большинство наблюденныхъ точекъ расположено ниже кривой. Поэтому вполнѣ позволительно видоизмѣнить кривую такъ, чтобы точка перегиба получилась на разстояніи 300 км., а точка Рудкаго на разстояніи 1600 км. Въ этомъ случаѣ по обѣимъ точкамъ, на основаніи приведенныхъ формулъ, получилась-бы глубина $h = 8$ км.

Все это относится къ моментамъ наступленія первой предварительной фазы.

Въ данномъ случаѣ требуется, очевидно, болѣе тщательный анализъ наблюденій, которымъ мы впослѣдствіи и займемся. Ограничимся пока заключеніемъ, что опредѣленіе глубины очага по одной только выдающейся точкѣ кривой пробѣга едва-ли можетъ дать удовлетворительные результаты и сдѣланныя до сихъ поръ попытки не выдерживаютъ критики.

На основаніи всего вышеизложеннаго нужно прійти къ выводу, что способы, основанные на моментахъ наступленія, до сихъ поръ не привели къ числамъ, заслуживающимъ довѣрія. Имѣя, однако, достаточное число точныхъ инструментальныхъ данныхъ, можно не безъ надежды на успѣхъ приступить къ обстоятельному рѣшенію задачи, но съ тѣмъ только условіемъ, чтобы кривизна траекторій сейсмическихъ волнъ была надлежащимъ образомъ принята въ разсчетъ. Наблюденія необходимо обработать по способу неименьшихъ квадратовъ и опредѣлить среднюю ошибку результата, о которой мы въ настоящее время не имѣемъ даже представленія.

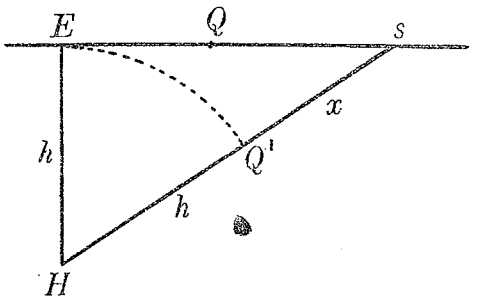
§ 26. Въ заключеніе этого обзора предложенныхъ до сихъ поръ методовъ опредѣленія глубины очага землетрясенія, нужно упомянуть еще объ одномъ сравнительно новомъ и своеобразномъ способѣ, предложенномъ Comas Solá[1]). Способъ этотъ основанъ исключительно на данныхъ сейсмограммы, именно на моментахъ наступленія первой предварительной фазы (P) и главной фазы (L). Волны главной фазы, какъ доказываетъ опытъ, распространяются параллельно земной поверхности съ постоянной скоростью v, между тѣмъ какъ волны P распространяются по сейсмическому лучу HS, принимаемому авторомъ за прямую, со скоростью $V > v$. Кривизной земной поверхности авторъ пренебрегаетъ, такъ что станція S и эпицентръ E находятся на одной прямой, перпендикулярной къ EH (см. черт. 4). Опишемъ около H окружность съ радіусомъ h. Тогда движеніе P наступитъ одновре-

---

[1]) Comas Solá. Calcul de la profondeur des hypocentres sismiques. Comptes Rendus hebd. 20 сент. 1909, т. 149.

менно въ точкахъ E и Q'. Въ моментъ, когда движеніе P наступитъ въ точкѣ S, движеніе L до этой точки еще не дошло, а наступитъ гдѣ-нибудь между E и S въ точкѣ Q. Положимъ, что разность временъ наступленія фазъ L и P въ точкѣ S равняется n секундамъ, а промежутокъ времени, соотвѣтствующій распространенію волнъ L на разстояніе EQ, равняется m секундамъ. Назовемъ разстояніе $Q'S=x$ и $ES=\Delta$. Тогда:

Черт. 4.



$$QS=nv, \ldots\ldots\ldots(41)$$

$$EQ=mv;\ Q'S=mV\ldots(42)$$

Исключивъ изъ уравненій (42) неизвѣстную m, уравненіе (41) можетъ быть написано въ видѣ

$$nv=QS=\Delta-EQ=\Delta-x\frac{v}{V}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots(43)$$

Треугольникъ HES даетъ

$$h=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta^2}{x}-x\right),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(44)$$

а уравненіе (43) можетъ быть написано въ видѣ

$$x=\frac{V}{v}(\Delta-v.n)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

Зная скорости v и V, можно, помощью уравненій (44) и (45), опредѣлить глубину h по даннымъ одной только станціи. Въ этомъ и состоитъ сущность способа Comas Solá. Для скорости v онъ принимаетъ величину 3.4 $^{км.}/_{сек.}$, какъ среднюю изъ болѣе старыхъ опредѣленій, помощью сейсмометровъ безъ затуханія. Едва-ли можно согласиться съ этимъ выборомъ. Я[1]) показалъ, на основаніи наблюденій одного только 1904 года, что скорость v варіируетъ въ довольно широкихъ предѣлахъ (отъ 3.0 до 4.4), смотря по обстоятельствамъ разнаго рода. Выборъ величины $v=3.4\ ^{км.}/_{сек.}$ совершенно произволенъ. То-же самое приходится замѣтить относительно

---

[1]) Elmar Rosenthal. Remarques sur la propagation des ondes sismiques longues. Comptes Rendus des Séances de la II Réunion de la Comm. Perm. et de la I Assemblée Génér. de l'Assoc. Intern. de Sismologie réunie á la Haye du 21 au 25 sept. 1907. Conf. VII, стр. 257–260.

скорости V. Comas Solá принимаетъ:

$$V = 5.5 + 0.0206\,h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

и опредѣляетъ h изъ совокупности уравненій (44), (45) и (46), путемъ постепенныхъ приближеній. Формула (46) не оправдывается никакими спеціальными данными и является вполнѣ произвольной. Мы увидимъ въ дальнѣйшемъ, что общій видъ функціи (46), съ нѣкоторымъ приближеніемъ, можетъ быть оправданъ. Точныя-же числовыя значенія параметровъ, входящихъ въ (46), пока неизвѣстны. Можетъ быть, эти параметры даже различны для разныхъ землетрясеній.

Комбинируя наблюденія нѣсколькихъ станцій, можно было-бы исключить скорости v и V изъ формулъ или опредѣлить ихъ каждый разъ для даннаго землетрясенія и для данной группы станцій. Можно далѣе, надлежащей переработкой формулъ, принять въ разсчетъ кривизну земной поверхности, а также учесть вліяніе кривизны луча HS, что составляетъ задачу нижеслѣдующаго изслѣдованія.

Существеннымъ и пока неустранимымъ недостаткомъ способа Comas Solá является, однако, неопредѣленность момента наступленія фазы L. Для отдаленныхъ землетрясеній получается точность только до 1—2 мин., для близкихъ-же землетрясеній еще не достаточно выяснено, что́ собственно слѣдуетъ считать главной фазой.

На основаніи сказаннаго, глубины, вычисленныя способомъ Comas Solá, не заслуживаютъ довѣрія и вполнѣ понятно, что этимъ путемъ нерѣдко получались прямо нелѣпые результаты. Критика поэтому и отнеслась отрицательно къ этому способу [1]).

§ 27. Резюмируя всѣ труды, приложенные до сихъ поръ къ опредѣленію глубины очага землетрясенія, нужно сознаться, что вопросъ и по настоящее время вполнѣ открытъ. Разнородныя, полученныя до сихъ поръ числа никакого реальнаго значенія не имѣютъ и представляютъ только результаты вычисленій, основанныхъ на сомнительныхъ предположеніяхъ. Единственное слѣдствіе, которое можно вывести, главнымъ образомъ, изъ наблюденій моментовъ наступленія сотрясеній на разныхъ разстояніяхъ отъ эпицентра, — то, что истинныя глубины незначительны и едва-ли превышаютъ нѣсколько десятковъ километровъ.

---

[1]) А. Я. Орловъ. Протоколы засѣданій Пост. Центр. Сейсм. Ком. 29-го янв. 1910, § 7. Изв. Пост. Центр. Сейсм. Ком., т. 4, вып. I, 1911.

Глава II.

Кривизна сейсмическаго луча.

§ 28. Во всѣхъ вышеприведенныхъ способахъ опредѣленія глубины очага землетрясенія, траекторія сейсмическихъ волнъ принималась за прямую. Это предположеніе равносильно допущенію, что упругія колебанія распространяются внутри земли съ постоянной скоростью. Уже выше было указано (§ 21) на работу A. Schmidt'a, направленную противъ такого допущенія. Послѣ Schmidt'a разными другими авторами были предложены способы опредѣленія истинной формы луча или связаннаго съ ней закона измѣненія скорости сейсмическихъ волнъ внутри земли.

R. de Kövesligethy[1]) впервые занимался аналитической разработкой этой задачи. Принимая формулу La Roche'a, опредѣляющую плотность внутреннихъ слоевъ земли какъ функцію разстоянія отъ центра, и связывая плотность съ показателемъ преломленія помощью формулы Ньютона, принимаемой обыкновенно въ оптикѣ для газовъ, онъ выводитъ слѣдующій законъ для скорости распространенія упругихъ колебаній внутри земли

$$v = \frac{1}{\sqrt{f + gr^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

гдѣ r — разстояніе отъ центра земли, а f и g постоянные коэффиціенты. Траекторія волнъ, соотвѣтствующая этому закону измѣненія скорости внутри земли, представляетъ гиперболу или эллипсъ, смотря по знаку параметра g; центръ этихъ кривыхъ совпадаетъ съ центромъ земли. Первоначально Kövesligethy выработалъ формулы для эллипса; g въ этомъ случаѣ величина

---

[1]) R. v. Kövesligethy. Neue Theorie seismischer Erscheinungen. Math. Naturw. Ber. aus Ungarn. XIII, 1897. На венгерскомъ языкѣ въ 1895 г.

Его-же. Die Berechnung seismischer Elemente. Math. Naturw. Ber. aus Ungarn. XXIII, 1905.

Его-же. Seismonomia. Boll. Soc. Sism. Ital. XI, № 5—6, 1906.

отрицательная. Позднѣе, когда выяснилось, что v вблизи центра земли имѣетъ бо́льшую величину, чѣмъ около поверхности, Kövesligethy передѣлалъ свои формулы для случая гиперболы; g тогда величина положительная. Формулы эти были примѣнены пока только къ одному спеціальному случаю [1]). Опредѣлялись шесть неизвѣстныхъ — координаты эпицентра, глубина очага, время наступленія сотрясенія въ гипоцентрѣ и параметры f и g — по моментамъ наступленія различныхъ фазъ землетрясенія на станціяхъ, находившихся на разстояніяхъ отъ 20° до 150° отъ эпицентра. Для глубины очага землетрясенія получилось неопредѣленное выраженіе, для другихъ элементовъ вѣроятныя ошибки были значительны; результаты нужно считать вообще мало удовлетворительными. Самъ авторъ считалъ свою работу «предварительной».

Ввиду сказаннаго нужно предполагать, что сейсмическіе лучи едва-ли могутъ быть представлены гиперболами съ достаточной точностью. Это даже мало вѣроятно, такъ какъ законы, на которыхъ основывается формула (47), слишкомъ спеціальны и едва-ли прилагаются къ случаю упругихъ колебаній внутри земли. Это послѣднее замѣчаніе относится, главнымъ образомъ, къ правилу Ньютона, принятому въ оптикѣ. Нѣтъ никакого основанія предполагать *a priori*, что преломленіе упругихъ колебаній въ землѣ слѣдуетъ тому-же закону, какъ преломленіе лучей свѣта въ газахъ. Такой законъ можно было бы оправдать только *a posteriori*.

Что касается до другихъ коническихъ сѣченій, то онѣ получаются изъ формулы (47) только при нѣкоторыхъ спеціальныхъ допущеніяхъ. Парабола получается только при условіи $g = 0$. Въ этомъ случаѣ скорость v постоянна и сейсмическіе лучи представляютъ прямыя; вершина параболы находится на безконечномъ разстояніи. Кругообразная орбита упругихъ волнъ, центръ которой совпадаетъ съ центромъ земли, получается только для одного спеціальнаго положенія исходной точки и для одного изъ всѣхъ лучей. Общее условіе полученія такой орбиты вывелъ я [2]).

§ 29. Послѣ Kövesligethy, M. P. Rudzki [3]) занимался общей теоріей криволинейныхъ сейсмическихъ лучей. Въ концѣ своей работы, основанной на гипотезѣ, что земля состоитъ изъ безконечно большого числа безконечно тонкихъ концентрическихъ сферическихъ слоевъ, причемъ ско-

---

[1]) R. v. Kövesligethy. Vorläufige Elementenbestimmung des Cerambebens. Beitr. zur Geophys. VIII, 1907, стр. 400—451.

[2]) Elmar Rosenthal. Über die Fortpflanzung der langen Erdbebenwellen. Phys. Zeitschr. 8, № 15, 1907, стр. 510—512.

[3]) M. P. Rudzki. Über die scheinbare Geschwindigkeit der Verbreitung der Erdbeben. Beitr. zur Geophysik. III, 1898, стр. 495.

рость непрерывно варіируетъ отъ одного слоя до слѣдующаго, онъ указываетъ на одинъ спеціальный законъ измѣненія скорости, который обуславливаетъ кругообразныя орбиты сейсмическихъ волнъ, а именно:

$$v = a - br^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

гдѣ a и b постоянные параметры. При этомъ центръ кругообразной орбиты находится гдѣ-нибудь внѣ земли, въ зависимости отъ значенія постоянныхъ a и b и положенія точекъ пересѣченія орбиты съ поверхностью земли.

Въ дальнѣйшихъ своихъ работахъ[1]) Rudzki занимался теоріей распространенія упругихъ колебаній въ анизотропныхъ тѣлахъ, не разсматривая, однако, спеціальныхъ случаевъ.

Значительно позже первой работы Рудкаго, W. Láska[2]) рекомендовалъ соотношеніе (48) для представленія скоростей сейсмическихъ движеній внутри земли и также примѣненіе кругообразныхъ орбитъ для вычисленія сейсмическихъ наблюденій. Онъ сообщилъ, однако, только нѣкоторыя формулы общаго характера, которыя, къ сожалѣнію, искажены опечатками. Какихъ-либо чиселъ или другихъ доводовъ для оправданія примѣненія этихъ формулъ онъ не далъ.

§ 30. Болѣе подробно Benndorf[3]) занимался вопросомъ о скорости распространенія упругихъ колебаній внутри земли. На основаніи наблюденій Schlüter'a[4]) надъ угломъ выхода, онъ вывелъ эмпирическій законъ распредѣленія скоростей внутри земли, въ зависимости отъ разстоянія отъ центра. Получилось слѣдующее распредѣленіе скоростей. Около земной поверхности, т.-е. для $r = R$, наблюдается наименьшая скорость v_0. Затѣмъ, скорость быстро растетъ и достигаетъ значенія $2v_0$ для $r = 0.95\,R$. Далѣе, скорость остается почти постоянной, приблизительно въ предѣлахъ отъ

---

[1]) M. P. Rudzki. Von der Gestalt elastischer Wellen in Gesteinen. Beitr. zur Geophys. III, 1898, стр. 519.

Его-же. Über ein der optischen Dispersion analoges Phänomen. Beitr. zur Geophys. IV, 1899, стр. 47.

Его-же. Parametrische Darstellung der elastischen Welle in anisotropen Medien. Bull. Acad. des Sciences de Cracovie. Octobre 1911, стр. 503—536.

Его-же. Sur la propagation d'une onde élastique superficielle dans un milieu transversalement isotrope. Bull. Acad. des Sciences de Cracovie. Janvier 1912, стр. 47—58.

[2]) W. Láska. Über die Verwendung der Erdbebenbeobachtungen zur Erforschung des Erdinneren. Mitteil. d. Erdbebenkomm. in Wien. N. F., № XXIII, 1904.

[3]) Hans Benndorf. Über die Art der. Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinneren. II. Mitteilung. Mitteil. d. Erdbebenkomm. in Wien. N. F. № XXXI, 1906.

[4]) W. Schlüter. Schwingungsart und Weg der Erdbebenwellen. I и II ч. Beitr. zur Geophys. V, I ч., стр. 314, 1901; II ч., стр. 401, 1902.

$r = 0.95\,R$ до $r = 0.8\,R$. Затѣмъ скорость снова увеличивается, но уже значительно медленнѣе: для $r = 0.5\,R$ получается, приблизительно, $v = 3v_0$. Съ этого предѣла до центра земли скорость остается почти постоянной.

§ 31. Вслѣдъ за Benndorf'омъ Wiechert и Zoeppritz [1]) занимались той-же задачей, основывая свои вычисленія на новѣйшихъ и лучшихъ моментахъ наступленія сотрясенія, т.-е. на кривой пробѣга, составленной по нѣкоторымъ точно наблюденнымъ землетрясеніямъ. Методъ изслѣдованія этихъ авторовъ состоялъ въ слѣдующемъ. Они разсматривали отдѣльно небольшіе куски сейсмическихъ лучей, считая ихъ за части окружности, пробѣгаемыя съ постоянной скоростью, и опредѣляли радіусы этихъ окружностей. Оказалось, что до значительной глубины — $r = 0.8\,R$ — радіусы отдѣльныхъ окружностей постоянны, т.-е. что сейсмическій лучъ до сравнительно большихъ эпицентральныхъ разстояній, до $\Delta = 5000$ км., очень близко представляется окружностью. До этой глубины скорость v быстро растетъ, согласно формулѣ (48), а затѣмъ остается почти постоянной, приблизительно до центра земли.

Нѣсколько позже Zoeppritz и Geiger [2]) повторяли эти вычисленія со всевозможной тщательностью. Результаты первыхъ вычисленій подтвердились и справедливость формулы (48) была, такимъ образомъ, доказана для наружнаго слоя земли въ предѣлахъ точности использованныхъ наблюденій. Дальнѣйшія работы Wiechert'а и его учениковъ [3]) привели къ подобнымъ-же результатамъ.

§ 32. Исходной точкой для вычисленій Wiechert'а служила формула

$$\cos\varepsilon = \frac{v_0}{u} = v_0 \frac{d\tau}{d\Delta} = \frac{v_0}{R} \cdot \frac{d\tau}{d\vartheta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

гдѣ u — «поверхностная скорость» въ смыслѣ Wiechert'а (см. § 22), а остальныя буквы имѣютъ прежнее значеніе.

Нѣтъ надобности остановиться на исторіи уравненія (49), вытекающей изъ уже приведенныхъ работъ Kövesligethy, Benndorf'а, Schuster'а

---

1) E. Wiechert und K. Zoeppritz. Über Erdbebenwellen. Nachr. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. I и II ч., 1907.

2) K. Zoeppritz und L. Geiger. Über Erdbebenwellen III. Nachr. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1909, № 4, стр. 400—428.

3) E. Wiechert u. Ludwig Geiger. Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern. Phys Zeitschr. 1910, стр. 294—311.

Ludwig Geiger u. Beno Gutenberg. Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus dem Bodenverrückungsverhältnis der einmal reflektierten zu den direkten Longitudinalwellen. (Vorl. Mitt.). Phys. Zeitschr. 1911, стр. 814—818.

и князя Голицына. Это уравненіе прямо вытекаетъ изъ понятій о волновой поверхности и о лучѣ, а также изъ опредѣленія поверхностной и истинной скорости.

Wiechert и его ученики пренебрегали глубиной очага использованныхъ ими землетрясеній и экстраполировали кривыя пробѣга до начала координатъ. Тогда v_0 опредѣлится какъ значеніе u или $\frac{d\Delta}{d\tau}$ въ эпицентрѣ и углы ε можно вычислить, на основаніи кривой пробѣга для любого разстоянія Δ. Зная углы ε, можно сконструировать искомыя окружности на основаніи геометрическихъ соображеній. Геометрическія конструкціи замѣнялись также отчасти вычисленіями интерполяціоннаго характера.

Методъ Wiechert'a основывается отчасти на графическихъ пріемахъ, отчасти на интерполяціонныхъ вычисленіяхъ и, такимъ образомъ, степень точности полученныхъ имъ результатовъ недостаточно выяснена. Мы въ дальнѣйшемъ выведемъ формулы, на основаніи которыхъ задача Wiechert'a можетъ быть рѣшена строгимъ путемъ, примѣненіемъ способа наименьшихъ квадратовъ.

Простой путь провѣрить, хотя-бы качественно, распредѣленіе скоростей внутри земли, найденное Wiechert'омъ, указалъ Trabert[1]).

§ 33. Одновременно съ приведенными работами Wiechert'a и его учениковъ появилась попытка Knott'a[2]), представить скорости внутри земли формулой

$$v = f_1 \sqrt{g_1 - r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

гдѣ f_1 и g_1 постоянныя, опредѣляемыя эмпирически. Вычисленные на этомъ основаніи моменты наступленія сотрясенія, однако, только довольно грубо согласуются съ наблюденіями.

Во всѣхъ приведенныхъ работахъ предполагается, что v представляетъ функцію только отъ r. Въ настоящее время приходится останавливаться именно на этомъ предположеніи. Оно доказывается возможностью сконструировать одну и ту-же кривую пробѣга для разныхъ землетрясеній, независимо отъ азимута станцій относительно эпицентра. Для одного спеціальнаго случая я старался доказать этотъ фактъ непосредственно[3]). Анизотропная структура наружныхъ слоевъ земли, повидимому, еще не можетъ быть об-

---

[1]) W. Trabert. Die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen in verschiedenen Tiefen. Mitteil. d. Erdbebenkomm. in Wien. N. F., № 37, 1909.

[2]) C. G. Knott. Seismic Radiations. Proc. R. Soc. Edinburgh. m. 28, 1908, стр. 217.

[3]) Elmar Rosenthal. Les tremblements de terre du Kamtchatka en 1904. Publ. du Bureau Central de l'Assoc. Int. de Sism. Strassbourg. 1907.

наружена современными сейсмометрическими наблюденіями. Это — задача болѣе отдаленнаго будущаго.

При такой постановкѣ вопроса наша проблема имѣетъ формальное сходство съ задачей атмосферной рефракціи и мы можемъ прямо заимствовать нѣкоторые результаты изъ теоріи этого явленія. Такъ, напр., законъ

$$v = \frac{1}{\sqrt{f_2 - g_2 r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

обусловилъ бы траекторію, выражающуюся въ видѣ логариѳмической функціи [1]). Парабола [2]), фокусъ которой совпадаетъ съ центромъ земли, требуетъ слѣдующій законъ распредѣленія скорости:

$$v = k\sqrt{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Подобнымъ образомъ можно было бы испробовать всевозможныя эмпирическія формулы, выражающія законъ измѣненія скорости внутри земли, и провѣрить, которая изъ нихъ лучше всего согласуется съ наблюденіями.

Нужно, однако, замѣтить, что задача сейсмологіи нѣсколько сложнѣе задачи атмосферной рефракціи. Въ послѣднемъ случаѣ требуется только найти касательную кривой, между тѣмъ какъ въ сейсмологіи нужно найти, кромѣ того, и длину дуги, и время распространенія волнообразнаго движенія.

§ 34. Аналитическая формулировка задачи представляется въ слѣдующемъ видѣ. Сейсмическіе лучи представляютъ такъ называемые брахистохроны, такъ что соблюдается принципъ Fermat, выражаемый закономъ:

$$\frac{r}{v} \sin i = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Здѣсь i обозначаетъ уголъ между касательной луча и радіусомъ векторомъ r, v представляетъ функцію только отъ r, а k — параметръ, постоянный для даннаго луча и вполнѣ характеризующій его. Уравненіе (53) (извѣстная основная формула астрономической рефракціи) представляетъ уравненіе луча въ полярныхъ координатахъ r и ϑ, началомъ которыхъ служитъ центръ земли. Оно основано на гипотезѣ, что земля состоитъ изъ безконечно большого числа концентрическихъ сферическихъ слоевъ, при чемъ скорость v непрерывно варіируетъ отъ одного слоя до слѣдующаго.

---

1) M. E. Mascart. Traité d'Optique. III, Paris 1892, стр. 276.

2) I. M. Pernter. Meteorologische Optik. Wien u. Leipzig 1910, стр. 62.

Величины, входящія въ уравненіе (53), недоступны измѣренію. Имѣя въ виду, что

$$\sin i = \frac{r\,d\vartheta}{ds}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

гдѣ ds элементъ луча и что

$$ds^2 = r^2\,d\vartheta^2 + dr^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

мы изъ (53) получимъ слѣдующія выраженія:

$$d\vartheta = \frac{kv\,dr}{r\sqrt{r^2 - k^2 v^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{r\,dr}{v\sqrt{r^2 - k^2 v^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

$$ds = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - k^2 v^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

Если v заданная функція отъ r, то (56) представляетъ уравненіе луча въ полярныхъ координатахъ. Взявъ интегралъ уравненія (56) между предѣлами, соотвѣтствующими точкамъ, въ которыхъ сейсмическій лучъ пересѣкаетъ земную поверхность, мы получимъ дугу, измѣряемую на земной поверхности, какъ функцію отъ k и можемъ, слѣдовательно, выразить k величиною, доступною измѣренію. Вводя это значеніе k въ (57) и (58), мы получимъ время t и длину s[1]) какъ функцію разстоянія, доступнаго измѣренію. Уголъ выхода мы получаемъ изъ (53), написавъ это уравненіе для точки, въ которой лучъ пересѣкаетъ земную поверхность

$$\frac{R}{v_0}\cos\varepsilon = k; \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sqrt{R^2 - k^2 v_0^2}}{k\,v_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Какъ и раньше, v_0 обозначаетъ значеніе скорости для поверхности земли ($r = R$), а ε — истинный уголъ выхода.

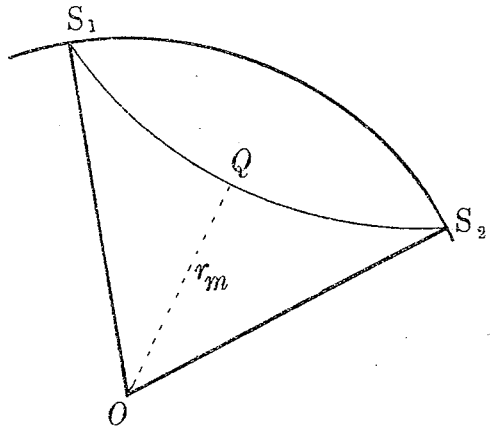
Если величины, вычисленныя по полученнымъ, такимъ образомъ, формуламъ, согласуются съ наблюденіями, то принятый законъ для v вѣренъ. Въ противномъ случаѣ, приходится подобрать другія выраженія для v и повторять вычисленія. Мы видѣли уже, что, на основаніи работы Wiechert'a, формула (48) лучше всего соотвѣтствуетъ наблюденіямъ, по крайней мѣрѣ, для не очень большихъ разстояній отъ земной поверхности (приблизительно до 1000 — 1500 км.).

---

[1]) Эта величина нужна для способа Kövesligethy опредѣленія глубины очага землетрясенія.

§ 35. Замѣтимъ еще слѣдующее. Каждый лучъ S_1S_2 (черт. 5) симметриченъ относительно своей средней точки Q, въ которой онъ достигаетъ наибольшей глубины [1]). Радіусъ-векторъ этой точки мы обозначимъ черезъ r_m, а соотвѣтствующую скорость черезъ v_m. Этому обстоятельству соотвѣтствуетъ двойной знакъ квадратнаго корня въ выраженіяхъ (56), (57) и (58). Интегрируя эти выраженія, мы замѣтимъ, что возрастающему $d\vartheta$, dt, ds на пути S_1Q соотвѣтствуетъ убываніе dr. Нужно, слѣдовательно, брать корень съ отрицательнымъ знакомъ. Отъ Q до S_2, напротивъ, r возрастаетъ и корень нужно брать съ положительнымъ знакомъ. Можно ограничиться послѣднимъ случаемъ, если распространить интегралы только отъ r_m до R и затѣмъ удвоить результатъ.

Черт. 5.



Въ точкѣ Q уголъ i всегда равенъ $\frac{\pi}{2}$. Уравненіе (53) даетъ для этой точки слѣдующую величину

$$k = \frac{r_m}{v_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

и каждый лучъ, слѣдовательно, можетъ быть охарактеризованъ соотвѣтствующимъ ему отношеніемъ $\frac{r_m}{v_m}$.

Отмѣтимъ еще слѣдующее замѣчательное соотношеніе, вытекающее изъ сравненія уравненій (49), (59) и (53)

$$k = \frac{d\tau}{d\vartheta} = \frac{r}{v}\sin i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Wiechert для своихъ вычисленій пользовался уравненіями (49) и (61). Вычисливъ сначала уголъ ε для луча, обнимающій небольшое разстояніе Δ, онъ опредѣлилъ центръ круга, пересѣкающій земную поверхность подъ этимъ угломъ, а затѣмъ и соотвѣтствующую величину r_m. Соотвѣтствующая величина v_m получилась помощью формулы (60). Эти вычисленія затѣмъ повторялись для постепенно увеличивающихся значеній Δ и соотвѣтственно убывающихъ значеній r_m, при чемъ радіусы круговъ и величины v

---

[1]) См. вышеприведенную основную работу Рудкаго.

для предыдущихъ слоевъ были извѣстны изъ первыхъ вычисленій. При этомъ и обнаружилась справедливость формулы (48).

§ 36. Почти одновременно съ работами Wiechert'а былъ предложенъ другой способъ для опредѣленія закона, по которому измѣняется v внутри земли. Способъ этотъ былъ придуманъ двумя математиками Herglotz'емъ[1]) и Bateman'омъ[2]), повидимому независимо, а затѣмъ использованъ и Wiechert'омъ[3]), для повѣрки своихъ первыхъ работъ. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ.

Уравненіе (56) можетъ быть написано и такъ:

$$d\vartheta = k\frac{d\lg r}{\sqrt{\left(\frac{r}{v}\right)^2 - k^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

Уголъ ϑ, соотвѣтствующій разстоянію S_1S_2 (черт. 5), получается изъ (62) распространеніемъ интеграла отъ r_m до R и удваиваніемъ результата, такъ что:

$$\frac{\vartheta}{2k} = \int_{r_m}^{R} \frac{d\lg r}{\sqrt{\left(\frac{r}{v}\right)^2 - k^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

Здѣсь можно разсматривать ϑ какъ функцію отъ k, при чемъ начальной величинѣ $\vartheta = 0$ соотвѣтствуетъ наибольшее значеніе $k_0 = \frac{R}{v_0}$. При возрастаніи ϑ, k постоянно убываетъ и исчезаетъ для максимальнаго значенія $\vartheta = \pi$. Такъ какъ v должна быть функціей отъ r, то можно и наоборотъ, считать r функціей отъ v или даже отъ $\frac{r}{v}$.

Положимъ, что

$$x = \left(\frac{r}{v}\right)^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

$$y = k^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

$$\frac{\vartheta}{2k} = F(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

---

[1]) G. Herglotz. Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen. Phys. Zeitschr. VIII, 1907, стр. 145—147.

[2]) H. Bateman. Die Lösung der Integralgleichung, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erdbebenwelle im Innern der Erde mit den Zeiten verbindet, die die Störung gebraucht, um zu verschiedenen Stationen auf der Erdoberfläche zu gelangen. Phys. Zeitschr. XI, 1910, стр. 96—99.

[3]) E. Wiechert u. Ludwig Geiger. Bestimmung des Weges der Erdbebenwellen im Erdinnern. Phys. Zeitschr. XI, 1910, стр. 294—311.

Тогда (63) принимаетъ видъ

$$F(y) = \int_{r_m}^{R} \frac{d \lg r(x)}{\sqrt{x-y}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

Если въ (67) считать перемѣнной интеграціи x, то предѣлы измѣнятся въ зависимости отъ (60), (64) и (65) и будутъ соотвѣтственно y и k_0^2. Въ выраженіи (67) $F(y)$ представляетъ извѣстную функцію, такъ какъ τ *эмпирически* опредѣлимая функція отъ ϑ, именно — кривая пробѣга. $F(y)$ опредѣляется, слѣдовательно, уравненіями (61) и (66). Напротивъ, $\lg r$ слѣдуетъ считать неизвѣстной функціей отъ x. Если можно опредѣлить видъ этой функціи, то, помощью (64), опредѣлится и искомый видъ функціи v.

Первоначальное, хотя и не вполнѣ строгое рѣшеніе этой задачи, т.-е. обращеніе интеграла (67), принадлежитъ Abel'ю[1]). Онъ при этомъ воспользовался слѣдующей формулой, выведенной имъ на основаніи перваго и второго свойства функцій Г:

$$f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^{1-n}} \int_0^y \frac{f'(z)\,dz}{(y-z)^n}, \ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

гдѣ

$$0 < n < 1 \quad \text{и} \quad f(0) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

Въ нашемъ случаѣ рѣшеніе задачи можетъ быть получено на основаніи болѣе простой формулы, а именно:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} = \pi. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

Не входя въ подробности рѣшенія т. н. интегральныхъ уравненій типа (67), ограничимся приведеніемъ результата, который можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\lg r(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^{k_0^2} \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{y-x}} + \text{const.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

Слѣдовательно, если $F(y)$ извѣстно, то, послѣ выполненія квадратуры (71), получается $\lg r$, а затѣмъ, помощью (64), и v.

---

[1]) N. H. Abel. Auflösung einer mechanischen Aufgabe. Crelle's Journal, I, 1826, стр. 153 — 157.

§ 37. Этотъ способъ, однако, не далъ пока ничего существенно новаго. Дѣло въ томъ, что кривая пробѣга или законъ

$$\tau = f(\vartheta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

извѣстенъ лишь *эмпирически*, такъ что аналитическій видъ функціи $F(y)$ до нѣкоторой степени произволенъ. Не говоря о затрудненіяхъ квадратуры (71) и рѣшенія уравненія (64) относительно v, мы видимъ, что эта послѣдняя функція получится также въ произвольномъ, до нѣкоторой степени, видѣ. Поэтому Wiechert предпочиталъ механическую квадратуру аналитической и, въ концѣ концовъ, подтвердилъ только найденные имъ уже раньше результаты.

Для примѣненія изложеннаго способа по Herglotz'у необходимо, чтобы $F(y)$ была монотонная функція. Это условіе соблюдается только тогда, когда глубина очага $h = 0$. Если $h > 0$, то съ возрастающимъ ϑ параметръ k сначала возрастаетъ отъ 0 до $\frac{R-h}{v(R-h)}$, а потомъ снова убываетъ до 0. Первая часть, такъ называемая внутренняя область, простирается только на незначительное разстояніе отъ эпицентра. Для случая прямолинейнаго распространенія сейсмическихъ волнъ, размѣры этой области усматриваются изъ сообщенной выше таблицы (см. § 19). Для случая криволинейныхъ лучей размѣры эти еще меньше.

Кромѣ того нужно имѣть въ виду, что всякій рядъ наблюденій всегда можетъ быть представленъ эмпирической формулой съ какой угодно степенью точности, если только число произвольныхъ постоянныхъ, входящихъ въ формулу, достаточно велико. Поэтому всегда стараются найти достаточное представленіе наблюденій съ возможно меньшимъ числомъ постоянныхъ. Сознавая неточность предположенія о постоянной скорости распространенія сейсмическихъ волнъ внутри земли, нужно стараться выразить эту скорость во второмъ приближеніи, при помощи не болѣе двухъ постоянныхъ. На основаніи работъ Wiechert'а это представляется вполнѣ возможнымъ, по крайней мѣрѣ для не очень большихъ глубинъ, т.-е. для $r > \frac{4}{5}R$, и для не очень большихъ эпицентральныхъ разстояній ($\vartheta < 40°$). Формула (48) представляется поэтому вполнѣ раціональной и пока нѣтъ надобности искать болѣе точную, но и болѣе сложную формулу для не очень большихъ глубинъ.

Все сказанное относится непосредственно къ опредѣленію глубины очага землетрясенія. Искать спеціальную формулу для представленія скоростей во внутренней области около эпицентра даннаго землетрясенія, при помощи способа Herglotz'а, представляется нераціональнымъ главнымъ образомъ уже потому, что наблюденія крайне малочисленны. Приходится, поэтому, ограничиться формулой съ двумя постоянными, а изъ такихъ фор-

мулъ уравненіе (48), на основаніи имѣющихся уже работъ, представляется наиболѣе правдоподобнымъ. Для опредѣленія глубины очага землетрясенія требуется вывести такія формулы, чтобы искомая глубина h и постоянныя a и b формулы (48) получались прямо изъ наблюденій. Радіусъ найденнаго такимъ образомъ круга представитъ средній радіусъ кривизны истиннаго луча.

§ 38. Для того, чтобы имѣть понятіе о порядкѣ тѣхъ величинъ, съ которыми приходится имѣть дѣло, мы сообщимъ здѣсь нѣкоторыя числа, полученныя способомъ Wiechert'a[1]). Скорости относятся къ началу первой предварительной фазы.

r		v	
въ км.	въ $R=1$	км./сек.	$R=1$
6367	1.000	7.17	0.001126
6267	0.985	7.60	0.001194
6167	0.969	8.01	0.001258
6067	0.953	8.42	0.001322
5967	0.937	8.83	0.001387
5867	0.922	9.23	0.001450
5767	0.906	9.62	0.001512
5667	0.890	10.00	0.001570

Скорости, помѣщенныя въ таблицѣ, могутъ быть достаточно точно выражаемы формулой

$$v = 0.003274 - 0.002148\, r^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

если принять $R = 1$.

Предѣльная глубина, т.-е. радіусъ $r = 0.89\, R$, соотвѣтствуетъ лучу, обнимающему эпицентральное разстояніе $\Delta = 3000$ км.

§ 39. Нетрудно доказать, что кругообразная орбита сейсмическихъ волнъ дѣйствительно соотвѣтствуетъ закону (48). Для этого напишемъ

---

[1]) K. Zoeppritz und L. Geiger. Über Erdbebenwellen III. Nachr. K. Ges. zu Göttingen. 1909, № 4, стр. 423.

формулу для радіуса кривизны въ полярныхъ координатахъ, принимая r за независимую перемѣнную:

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^3 + 2\frac{d\vartheta}{dr} + r\frac{d^2\vartheta}{dr^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

Производную $\frac{d\vartheta}{dr}$ получимъ изъ (56) въ видѣ

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{kv}{r\sqrt{r^2 - k^2v^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

Помощью (75) мы можемъ вычислить всѣ величины, входящія въ (74).

Послѣ нѣкоторыхъ простыхъ сокращеній, радіусъ кривизны ρ принимаетъ видъ:

$$\rho = \pm \frac{r}{k\frac{dv}{dr}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

Приравнявъ ρ постоянной величинѣ, мы изъ (76) получимъ дифференціальное уравненіе для v, рѣшеніе котораго и представляетъ уравненіе (48). Знакъ — передъ коэффиціентомъ b поставленъ потому, что v убываетъ съ возрастающимъ r. Коэффиціенты a и b, а также глубина h, входятъ, слѣдовательно, въ вычисленіе какъ существенно положительныя числа.

Изъ (48) получимъ

$$\frac{dv}{dr} = -2br \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

Слѣдовательно, радіусъ сейсмическаго луча, соотвѣтствующаго параметру k, выразится въ видѣ:

$$\rho = \frac{1}{2bk} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

Для глубины очага $h = 100$ км. $= 0.0157\,R$, максимальное значеніе

$$k = \frac{R-h}{a - b(R-h)^2}$$

равняется 826, если принять $R=1$, а для a и b взять ихъ значенія изъ (73). Для соотвѣтствующаго луча получится:

$$\rho = 0.28\,R.$$

Кривизна сейсмическихъ лучей, встрѣчающихъ земную поверхность вблизи предѣла внутренней и внѣшней области, слѣдовательно, значительно больше кривизны земной поверхности.

Глава III.

Формулы для кругообразной орбиты сейсмическаго луча.

§ 40. Чтобы вывести формулы, годныя для опредѣленія глубины очага, на основаніи гипотезъ, изложенныхъ въ предыдущей главѣ, необходимо интегрировать выраженія (56), (57) и (58), принимая для v формулу (48). При этомъ нужно обратить вниманіе на своеобразное затрудненіе, которое выясняется помощью ниже помѣщеннаго чертежа 6, въ которомъ

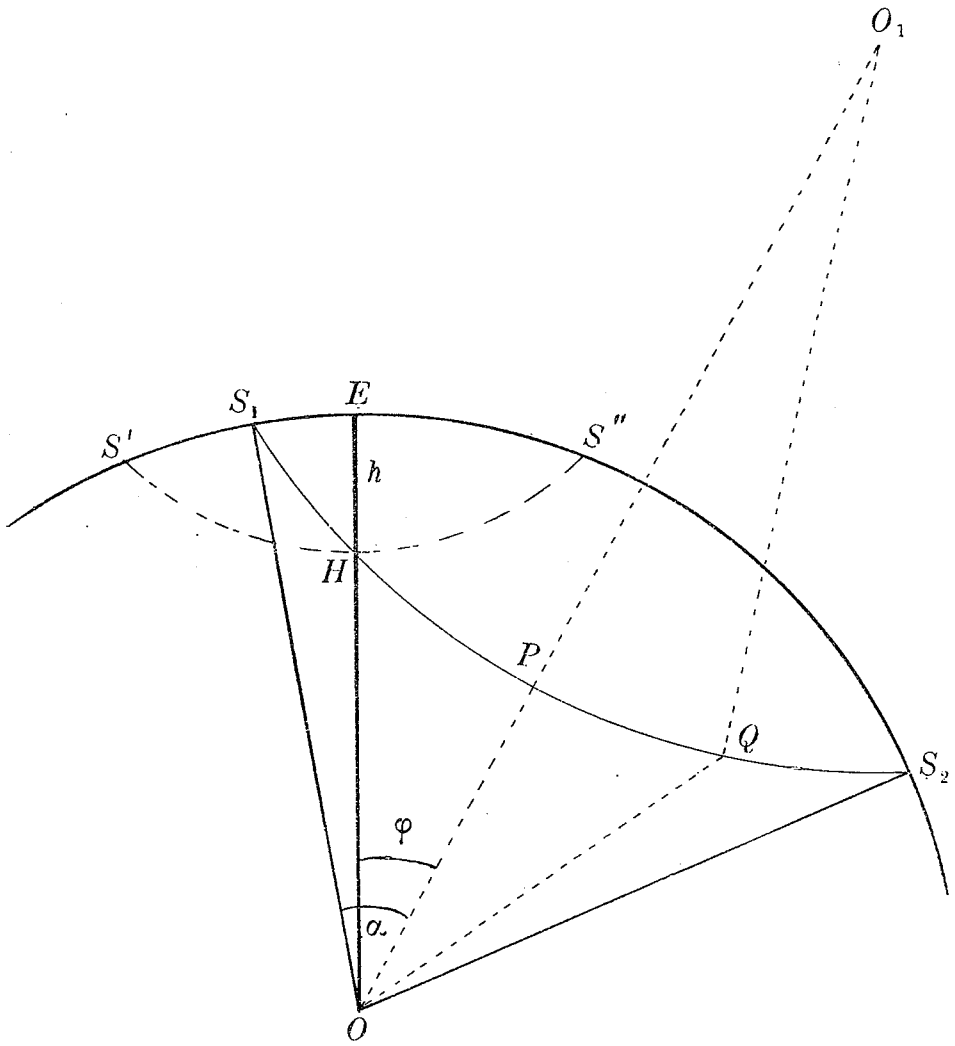
O обозначаетъ центръ земли,
H » очагъ,
E » эпицентръ,
O_1 » центръ сейсмическаго луча S_1S_2,
P » точку, для которой r_m — минимумъ.

Лучъ $S'S''$, выходящій изъ H перпендикулярно къ OE, отдѣляетъ внутреннюю область отъ внѣшней. Всякій другой лучъ S_1S_2 проходитъ отчасти во внутренней области, отчасти во внѣшней. Центральный уголъ EOS_1 обозначимъ черезъ θ_1 и соотвѣтствующее эпицентральное разстояніе черезъ Δ_1, а для внѣшней области положимъ $EOS_2=\theta_2$ и $ES_2=\Delta_2$. Уголъ $S_1OP=S_2OP$ обозначимъ черезъ α и HOP черезъ φ. Тогда

$$\theta_1=\alpha-\varphi;\quad \theta_2=\alpha+\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

Каждому опредѣленному значенію параметра k соотвѣтствуетъ одинъ лучъ S_1S_2 и два значенія θ_1 и θ_2, или два значенія Δ_1 и Δ_2, измѣряемыя на земной поверхности, между тѣмъ какъ каждому значенію Δ или θ соотвѣтствуетъ только одно значеніе k. Интегрируя выраженія (56), (57) и (58) отдѣльно для отрѣзковъ HS_1 и HS_2, мы получимъ по двѣ различныхъ формулы, относящихся къ внутренней и къ внѣшней области.

Черт. 6.



Для практическихъ вычисленій, однако, удобнѣе имѣть однообразныя формулы, такъ какъ не зная глубины h, нельзя опредѣлить впередъ, находится-ли данная станція во внутренней или во внѣшней области.

§ 41. Прямое рѣшеніе задачи представляется въ слѣдующемъ видѣ. Выраженіе (56) даетъ:

$$\theta_1 = \int_R^{R-h} d\vartheta; \quad \theta_2 = \int_{R-h}^{r_m} d\vartheta + \int_{r_m}^{R} d\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

Въ каждый изъ этихъ интегралов входитъ параметръ k, который и опредѣляется изъ (80), какъ функція отъ θ_1 или θ_2. Затѣмъ получимъ изъ (57)

$$t_1 = \int_R^{R-h} dt; \quad t_2 = \int_{R-h}^{r_m} dt + \int_{r_m}^{R} dt. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

Въ эти интегралы нужно вставить величины k, полученныя изъ (80). Получатся два различныя выраженія для t_1 и t_2, притомъ довольно сложныя.

Для длины дугъ HS_1 и HS_2 получимъ подобнымъ образомъ:

$$s_1 = \int_R^{R-h} ds; \quad s_2 = \int_{R-h}^{r_m} ds + \int_{r_m}^{R} ds. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Въ этомъ случаѣ, однако, вполнѣ элементарнымъ путемъ можно найти выраженіе для длины отрѣзка дуги сейсмическаго луча какъ функцію эпицентральнаго разстоянія, независимо отъ области, въ которой лучъ выходитъ. Обозначимъ въ этомъ случаѣ длину дуги буквой s (безъ значка) и соотвѣтствующій уголъ у центра земли буквой θ. Выраженіе для s, какъ легко видѣть, слѣдующее:

$$s = 2\rho \arcsin \frac{\sqrt{h^2 + 4R(R-h)\sin^2\frac{\theta}{2}}}{2\rho}. \ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

Радіусъ ρ получится изъ (78), такъ что

$$s = \frac{1}{bk} \arcsin bk \sqrt{h^2 + 4R(R-h)\sin^2\frac{\theta}{2}}. \ldots\ldots\ldots (84)$$

Нужно преобразовать выраженія для k, получаемыя изъ (80), такимъ образомъ, чтобы параметръ k представился однозначной функціей отъ θ, независимо отъ того, принадлежитъ-ли соотвѣтствующая точка земной поверхности къ внутренней или къ внѣшней области. Такое выраженіе для k и нужно вставить въ (84).

§ 42. Предварительно опредѣлимъ величину r_m. Для этого служитъ уравненіе (53). Такъ какъ въ точкѣ P всегда $\sin i = 1$, имѣемъ

$$k = \frac{r_m}{a - b r_m^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

откуда

$$r_m = \frac{\pm\sqrt{1 + 4ab k^2} - 1}{2bk}. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

Не трудно убѣдиться, что корень слѣдуетъ брать съ положительнымъ знакомъ. Замѣтимъ, что для луча $S'S''$ точка P совпадаетъ съ точкой H. Для этого луча, слѣдовательно,

$$k = \frac{R-h}{a - b(R-h)^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

а

$$r_m = R - h.$$

Вставивъ эти выраженія въ формулу (86), мы убѣдимся въ томъ, что тождество получается только тогда, когда передъ корнемъ ставится положительный знакъ. Слѣдовательно,

$$r_m = \frac{+\sqrt{1+4ab\,k^2}-1}{2bk} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

Легко опредѣлить и разстояніе $l = OO'$. Помощью (78) имѣемъ

$$l = r_m + \rho = \frac{\sqrt{1+4ab\,k^2}}{2bk}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

а также

$$\frac{l}{\rho} = \sqrt{1+4ab\,k^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

§ 43. Обращаемся теперь къ задачѣ, выразить k въ видѣ функціи отъ ϑ. Выраженіе (56) можно написать въ слѣдующемъ видѣ, если принять для v законъ (48):

$$d\vartheta = \pm \frac{(a - b\,r^2)\,dr}{br\sqrt{-r^4 + r^2 \cdot \frac{1+2ab\,k^2}{b^2\,k^2} - \frac{a^2}{b^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

Если интегрировать это выраженіе по обыкновеннымъ правиламъ, то неопредѣленный интегралъ получится въ видѣ суммы arc tg'a и arc sin'a довольно сложныхъ выраженій. Результатъ затѣмъ значительно упрощается примѣненіемъ элементарной формулы

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Можно, однако, получить упрощенный результатъ и болѣе короткимъ путемъ, если написать (91) въ видѣ:

$$d\vartheta = \pm k \frac{dr}{r} \frac{\frac{a}{r} - br}{\sqrt{1 - k^2\left(\frac{a}{r} - br\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

и подставить другую перемѣнную интеграціи:

$$x = \frac{a}{r} - br; \quad \frac{dr}{r} = -\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4ab}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

Замѣтимъ, что отрицательный знакъ въ выраженіи (92) соотвѣтствуетъ первой части пути интеграціи отъ R до r_m, т.-е. дугѣ S_1P. Сохраняя только отрицательный знакъ, получимъ изъ (92), помощью (93), послѣ нѣкоторыхъ простыхъ вычисленій неопредѣленный интегралъ:

$$\vartheta = \text{const} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2k^2\left(\frac{a}{r}-br\right)^2-1+4abk^2}{1+4abk^2}$$

$$= \text{const} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2k^2(a^2+b^2r^4)-r^2}{r^2(1+4abk^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (94)$$

Прямое вычисленіе выраженій (80), помощью неопредѣленнаго интеграла (94), приводитъ къ формуламъ, крайне неудобнымъ для дальнѣйшихъ вычисленій. Поэтому поступаемъ нѣсколько иначе и опредѣлимъ сначала углы α и φ. Имѣемъ:

$$\alpha = \int_R^{r_m} d\vartheta; \quad \varphi = \int_{R-h}^{r_m} d\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (95)$$

Для r_m воспользуемся выраженіемъ (88) и замѣтимъ, что

$$\left|\arcsin\frac{2k^2(a^2+b^2r^4)-r^2}{r^2(1+4abk^2)}\right|_{r=r_m} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (96)$$

Уголъ α опредѣляется, слѣдовательно, на основаніи уравненія:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2k^2(a^2+b^2R^4)-R^2}{R^2(1+4abk^2)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (97)$$

изъ котораго легко выводятся формулы:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{R^2-k^2(a-bR^2)^2}}{R\sqrt{1+4abk^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

$$\cos\alpha = \frac{k(a+bR^2)}{R\sqrt{1+4abk^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{R^2-k^2(a-bR^2)^2}}{k(a+bR^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

Аналогичнымъ путемъ можно вывести соотвѣтствующія формулы для угла φ изъ уравненій (94), (95) и (96). Нѣсколько проще мы получимъ соотвѣтствующія выраженія, замѣняя R въ уравненіяхъ (98), (99) и (100) величиною $R-h$.

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(R-h)^2-k^2[a-b(R-h)^2]^2}}{(R-h)\sqrt{1+4abk^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (101)$$

$$\cos\varphi = \frac{k\,[a + b\,(R-h)^2]}{(R-h)\,\sqrt{1 + 4ab\,k^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (102)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{(R-h)^2 - k^2\,[a - b\,(R-h)^2]^2}}{k\,[a + b\,(R-h)^2]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (103)$$

Замѣтимъ кстати, что вслѣдствіе (79):

$$\cos\alpha : \cos\varphi = \cos\tfrac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) : \cos\tfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \left(1 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta_2\right) : \left(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta_2\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (104)$$

На основаніи только что написанныхъ выраженій (99) и (102) мы получимъ изъ (104):

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2} = \frac{R\,[a + b\,(R-h)^2] - (a + b\,R^2)(R-h)}{R\,[a + b\,(R-h)^2] + (a + b\,R^2)(R-h)}$$

$$= \frac{h\,(a - b\,R^2) + b\,h^2\,R}{R\,[a + b\,(R-h)^2] + (R-h)(a + b\,R^2)} \cdot \ldots\ldots\ldots (105)$$

Это выраженіе всегда положительно. Если даны величины a, b и h, можно для каждаго θ_1 вычислить соотвѣтствующее θ_2 и наоборотъ. Полагая $\theta_1 = \theta_2$, мы изъ (105) можемъ вычислить и уголъ θ_0, соотвѣтствующій лучу $S'S''$, и, такимъ образомъ, опредѣлить предѣлы внутренней и внѣшней областей.

§ 44. Найденныя выше формулы непосредственно приводятъ къ рѣшенію задачи, опредѣлить параметръ k какъ функцію эпицентральнаго разстоянія. На основаніи (79) имѣемъ

$$\cos\varphi = \cos(\alpha - \theta_1) = \cos(\theta_2 - \alpha), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (106)$$

такъ что для угла θ безразлично, относится-ли онъ къ внѣшней или къ внутренней области:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (107)$$

Отсюда, помощью (98), (99) и (102), вычисляется легко искомая зависимость, а именно:

$$k = \frac{R\,(R-h)\sin\theta}{\sqrt{[R\,\{a + b\,(R-h)^2\} - (R-h)\,(a + b\,R^2)\cos\theta]^2 + (R-h)^2\,(a - b\,R^2)^2\sin^2\theta}} \ldots (108)$$

Подставивъ эту величину въ уравненіе (84), мы получимъ выраженіе

для длины s въ видѣ функціи трехъ постоянныхъ a, b и h и эпицентральнаго разстоянія θ.

Замѣтимъ, что въ случаѣ $h = 0$, внутренняя область становится безконечно малой. Тогда углы θ_1, θ_2 и 2α совпадаютъ и мы получимъ болѣе простое выраженіе для параметра k, помощью одной изъ формулъ (98), (99) или (100), напримѣръ:

$$k = \frac{R\cos\alpha}{\sqrt{(a - b\,R^2)^2 + 4ab\,R^2\sin^2\alpha}} = \frac{R}{\sqrt{(a - b\,R^2)^2 + (a + b\,R^2)^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}} \quad \ldots(109)$$

Въ этомъ случаѣ и дуга s выразится болѣе простой формулой, которая получится изъ (84), или прямо изъ чертежа:

$$\sin bks = 2bkR\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(110)$$

Найденное выше выраженіе (108) для k неудобно для дальнѣйшихъ вычисленій. Замѣчая-же, что неизвѣстныя a, b и h входятъ въ (108) только въ видѣ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ комбинацій, мы можемъ значительно упростить это выраженіе. Для этого положимъ, что

$$\lambda = \frac{a - b\,R^2}{R}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(111)$$

$$\mu = \frac{a + b\,R^2}{R}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(112)$$

$$\nu = \frac{a + b\,(R - h)^2}{R - h}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(113)$$

гдѣ λ, μ, ν представляютъ новыя неизвѣстныя. Зная λ, μ, ν, мы, наоборотъ, изъ (111) и (112) опредѣлимъ a и b, а затѣмъ изъ (113) и h:

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}R, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(114)$$

$$b = \frac{\mu - \lambda}{2R}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(115)$$

$$h = R - \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 4ab}}{2b}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(116)$$

Раздѣливъ числитель и знаменатель выраженія (108) на $R(R - h)$, мы, помощью обозначеній (111), (112) и (113), найдемъ:

$$k = \frac{\sin\theta}{\sqrt{(\nu - \mu\cos\theta)^2 + \lambda^2\sin^2\theta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(117)$$

§ 45. Формула (117) могла-бы служить для опредѣленія глубины очага землетрясенія. Если дана кривая пробѣга, то можно опредѣлять касательныя въ разныхъ точкахъ ея и такимъ образомъ, на основаніи соотношенія (61), находить значенія k для разныхъ угловъ θ.

Изъ (117) получимъ:

$$(\nu^2 + \mu^2) - 2\nu\mu\cos\theta + (\lambda^2 - \mu^2)\sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{k^2} \quad \ldots\ldots(118)$$

Это линейное уравненіе относительно неизвѣстныхъ $(\nu^2 + \mu^2)$, $\nu\mu$, $(\lambda^2 - \mu^2)$, которыя можно опредѣлить, зная, по крайней мѣрѣ, три пары соотвѣтствующихъ значеній k и θ. При наличности большаго числа наблюденій, систему уравненій (118) слѣдовало-бы рѣшить по способу наименьшихъ квадратовъ. Опредѣливъ, такимъ образомъ, наиболѣе вѣроятныя значенія комбинацій $(\nu^2 + \mu^2)$, $\nu\mu$ и $(\lambda^2 - \mu^2)$, можно было-бы вычислить и λ, μ, ν отдѣльно, а затѣмъ, помощью (114), (115) и (116), и a, b, и h.

Видъ уравненія (118), однако, непригоденъ для дѣйствительныхъ вычисленій, такъ какъ на практикѣ необходимо ограничиться небольшими эпицентральными разстояніями. Въ этомъ случаѣ опредѣлитель трехъ уравненій типа (118) очень малъ. Преобразуемъ поэтому (118), замѣняя тригонометрическія функціи дуги θ безконечными рядами и пренебрегая шестыми и высшими степенями θ. Тогда (118) приметъ видъ:

$$(\nu - \mu)^2 + (\lambda^2 - \mu^2 + \nu\mu)\left(\theta^2 - \frac{\theta^4}{3}\right) + \frac{1}{4}\theta^4\nu\mu = \frac{\sin^2\theta}{k^2}, \ldots(119)$$

въ которомъ выступаютъ другія комбинаціи неизвѣстныхъ λ, μ, ν. Эта новая форма уравненій, какъ видно, также не особенно выгодна для практическихъ примѣненій. Кромѣ того, вслѣдствіе значительныхъ ошибокъ наблюденій при маломъ числѣ станцій, расположенныхъ достаточно близко къ эпицентру, кривая пробѣга будетъ въ значительной степени произвольной. Касательныя къ этой кривой или производныя $\frac{d\tau}{d\Delta}$ будутъ опредѣляться неточно и поэтому выгоднѣе подвергать анализу прямо моменты наступленія сотрясенія, а не кривую, построенную по этимъ наблюденіямъ. Поэтому мы не входимъ въ подробный разборъ уравненія (119), а обращаемся къ другому примѣненію формулы (117).

§ 46. Уравненіе (59) представляетъ связь между угломъ выхода ε и параметромъ k. Въ нашемъ случаѣ и при помощи обозначенія (111), она можетъ быть написана такъ:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 k^2}}{\lambda k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(120)$$

Подставляя сюда значеніе k изъ (117), получимъ

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\nu - \mu\cos\theta}{\lambda\sin\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (121)$$

Это уравненіе однородно относительно неизвѣстныхъ λ, μ, ν и поэтому эти неизвѣстныя не могутъ быть опредѣляемы отдѣльно по однимъ только наблюденіямъ угла выхода, а только ихъ отношенія, напримѣръ $\frac{\nu}{\lambda}$ и $\frac{\mu}{\lambda}$.

Если-же, на основаніи наблюденій другого рода, извѣстна одна изъ нихъ, напримѣръ $\lambda = \frac{v_0}{R}$, которая, на основаніи кривой пробѣга, опредѣляется довольно точно, тогда по формулѣ (121) опредѣляются и остальныя двѣ, μ и ν. Нѣтъ надобности выписать формулы, которыя выводятся изъ (121), для $\frac{\nu}{\lambda}$ и $\frac{\mu}{\lambda}$, если даны углы ε_1 и ε_2, наблюденные на двухъ различныхъ станціяхъ. Эти неизвѣстныя представляются въ видѣ дробей, числитель и знаменатель которыхъ очень малыя величины, такъ что по нимъ нельзя вывести достаточно точные результаты.

Болѣе удобная формула получается, если ограничиться первой степенью дроби $\frac{h}{R}$. Подставляя въ (121) значенія λ, μ, ν, изъ (111), (112) и (113), и развивая правую часть по восходящимъ степенямъ $\frac{h}{R}$, получаемъ въ первомъ приближеніи

$$\operatorname{tg}\varepsilon\sin\theta - \frac{a + bR^2}{a - bR^2}(1 - \cos\theta) = \frac{h}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (122)$$

Второй членъ лѣвой части представляетъ величину порядка θ^2. Для очень малыхъ эпицентральныхъ разстояній онъ исчезаетъ по сравненію съ первымъ членомъ и формула (122) переходитъ въ соотвѣтствующую формулу для прямолинейнаго распространенія сейсмическихъ волнъ. На нѣсколько большихъ эпицентральныхъ разстояніяхъ $\operatorname{tg}\varepsilon$ можетъ уменьшаться примѣрно до 0.1 или 0.2, между тѣмъ какъ отношеніе $\frac{a + bR^2}{a - bR^2}$ всегда больше единицы[1]). Второй членъ становится тогда сравнимымъ съ первымъ и долженъ быть принимаемъ въ разсчетъ, по крайней мѣрѣ, въ видѣ поправки, на основаніи извѣстныхъ, по другимъ наблюденіямъ, приближенныхъ значеній a и b. При наличности достаточнаго числа благопріятно распредѣленныхъ наблюденій, можно опредѣлить обѣ неизвѣстныя формулы (122), а если, кромѣ того, извѣстна скорость $a - bR^2$, то можно вычислить отдѣльно a и b.

---

[1]) Пользуясь числами, выведенными Wiechert'омъ [формула (73)], найдемъ, что приблизительно $\frac{a + b}{a - b} = 5$. ($R = 1$).

Для большихъ эпицентральныхъ разстояній, для которыхъ можно пренебречь глубиной h, такъ что $\theta = 2\alpha$, уголъ выхода опредѣляется изъ формулы

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{a + bR^2}{a - bR^2}\operatorname{tg}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (123)$$

§ 47. Въ настоящее время опредѣленіе истиннаго угла выхода еще сопряжено со значительными затрудненіями техническаго и теоретическаго характера, такъ что простая формула (122), къ сожалѣнію, примѣнима только въ исключительныхъ случаяхъ. Поэтому мы сообщимъ здѣсь еще одну приближенную формулу, годную только для внутренней области, которая иногда можетъ дать нѣкоторое представленіе о порядкѣ величины искомой глубины.

Пренебрегая кривизной земной поверхности и сейсмическаго луча, имѣемъ

$$h = \Delta \operatorname{tg}\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (124)$$

Подставляя сюда для $\operatorname{tg}\varepsilon$ его значеніе изъ (120), получаемъ:

$$h = \Delta \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 k^2}}{\lambda k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (125)$$

Напишемъ два уравненія вида (125) для двухъ различныхъ значеній Δ' и Δ'', и соотвѣтствующихъ значеній k' и k'', и исключимъ изъ нихъ неизвѣстную λ. Тогда получимъ:

$$h^2 = \frac{(k'' - k')(k'' + k')}{\left(\frac{k'}{\Delta'} - \frac{k''}{\Delta''}\right)\left(\frac{k'}{\Delta'} + \frac{k''}{\Delta''}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (126)$$

Величины k опредѣляются изъ кривой пробѣга, на основаніи (61). Ясно, что формула (126) примѣнима только къ началу кривой пробѣга, до точки перегиба ея.

§ 48. Обращаемся теперь къ выводу формулы, опредѣляющей время наступленія сотрясенія на данной станціи, какъ функцію трехъ неизвѣстныхъ a, b и h. Для этого нужно интегрировать выраженіе (57), принимая во вниманіе законъ (48), и исключить параметръ k изъ окончательной формулы, помощью найденнаго уже соотношенія (108) или (117). Этотъ путь приводитъ къ довольно сложнымъ формуламъ, неудобнымъ для дальнѣйшихъ преобразованій и сокращеній. Значительно проще можно получать искомыя уравненія, принимая во вниманіе формулу (61). Каждое изъ найденныхъ

уже выраженій для k на этомъ основаніи опредѣляетъ связь между временемъ и дугой на земной поверхности помощью обыкновенной квадратуры. Мы здѣсь предпочитаемъ, однако, другой выводъ. Мы въ слѣдующемъ, идя однимъ и тѣмъ-же путемъ, получимъ всѣ формулы, которыя въ дальнѣйшемъ могутъ оказаться полезными.

Комбинируя (56) и (57) найдемъ

$$dt = \frac{1}{k}\left(\frac{r}{v}\right)^2 d\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (127)$$

Дробь $\frac{r}{v}$ нужно выразить какъ функцію отъ ϑ. Для этого воспользуемся извѣстнымъ намъ обстоятельствомъ, что лучъ S_1S_2 (черт. 6) представляетъ часть окружности круга, уравненіе котораго легко выразить извѣстными уже величинами. Условимся считать уголъ ϑ, начиная отъ радіуса r_m. Уравненіе круга получится тогда по разсмотрѣнію любой точки Q окружности въ видѣ:

$$\rho^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (128)$$

Величины l и ρ опредѣляются по формуламъ (89) и (78). Замѣтимъ, что

$$l^2 - \rho^2 = \frac{a}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (129)$$

Комбинируя формулы (89), (128) и (129), найдемъ

$$v^2 = (a - br^2)^2 = (a + br^2)^2 - 4abr^2 = \frac{r^2}{k^2}(1 + 4abk^2)\cos^2\vartheta - 4abr^2 \quad (130)$$

и при помощи этого соотношенія выраженіе (127) можно преобразовать въ слѣдующее

$$dt = \frac{k\,d\vartheta}{(1 + 4ab\,k^2)\cos^2\vartheta - 4ab\,k^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (131)$$

Это выраженіе легко интегрируется помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\vartheta = x; \quad d\vartheta = \frac{dx}{1 + x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (132)$$

Неопредѣленный интегралъ выраженія (131) получится тогда въ слѣдующемъ видѣ:

$$t = \frac{1}{4\sqrt{ab}} \lg nat \frac{1 + 2k\sqrt{ab}\operatorname{tg}\vartheta}{1 - 2k\sqrt{ab}\operatorname{tg}\vartheta} + \text{const.} \ldots\ldots\ldots (133)$$

§ 49. Найдемъ сначала значеніе этого выраженія для случая $h = 0$, т.-е. для случая, въ которомъ точка E совпадаетъ съ точкой S_1 (черт. 6).

Обозначимъ въ этомъ случаѣ время, необходимое для прохожденія сейсмическими волнами пути S_1S_2 съ эпицентра до станціи, буквой T. Тогда

$$T = 2\int_0^{\alpha} dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (134)$$

и мы изъ (133) получимъ

$$T = \frac{1}{\sqrt{ab}} \lg \frac{1 + 2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 - 4ab\,k^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (135)$$

Замѣняя въ знаменателѣ дроби подъ знакомъ логариѳма $\mathrm{tg}\,\alpha$ значеніемъ (100), а въ числителѣ выраженіемъ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, мы, при помощи формулъ (99) и (109), можемъ преобразовать (135) въ слѣдующій видъ:

$$T = \frac{1}{\sqrt{ab}} \lg \left\{ \sqrt{1 + \frac{4ab\,R^2}{(a - bR^2)^2} \sin^2\alpha} + \frac{2\sqrt{ab}\,R}{a - bR^2} \sin\alpha \right\} \quad \ldots\ldots (136)$$

Положимъ, что

$$\eta = \frac{2\sqrt{ab}\,R}{a - bR^2} \sin\alpha; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (137)$$

тогда

$$T = \frac{1}{\sqrt{ab}} \lg \left\{ \sqrt{1 + \eta^2} + \eta \right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (138)$$

и, слѣдовательно,

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ e^{T\sqrt{ab}} - \frac{1}{e^{T\sqrt{ab}}} \right\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (139)$$

Эти формулы могутъ съ успѣхомъ замѣнить графическій способъ Wiechert'a. Положимъ, что имѣются наблюденія моментовъ наступленія сотрясенія на двухъ станціяхъ, достаточно отдаленныхъ отъ эпицентра, такъ что можно пренебречь вліяніемъ глубины очага, и положимъ, что время наступленія землетрясенія въ эпицентрѣ извѣстно достаточно точно, такъ что промежутки времени T_1 и T_2 для этихъ двухъ станцій опредѣляются съ достаточной точностью. Мы имѣемъ тогда два уравненія типа (138). Полагая для сокращенія, что

$$Z = e^{\sqrt{ab}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (140)$$

мы, помощью (137) и (139), получимъ

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{Z^{T_1} - \left(\frac{1}{Z}\right)^{T_1}}{Z^{T_2} - \left(\frac{1}{Z}\right)^{T_2}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (141)$$

Не трудно рѣшить это трансцендентное уравненіе путемъ постепенныхъ приближеній. Зная Z, мы, помощью (140), получимъ и ab, а затѣмъ, помощью (137), и $a - bR^2$, причемъ должно быть:

$$a - bR^2 = \frac{2\sqrt{ab}\,R}{\eta_1}\sin\alpha_1 = \frac{2\sqrt{ab}\,R}{\eta_2}\sin\alpha_2. \quad \ldots\ldots\ldots(142)$$

Затѣмъ уже легко вычислить a и b отдѣльно.

§ 50. Дальнѣйшее вычисленіе производится на основаніи способа наименьшихъ квадратовъ. Опредѣливъ, помощью двухъ удачно выбранныхъ наблюденій, приближенныя значенія для a и b, мы вычисляемъ моменты наступленія сотрясенія T_c для всѣхъ имѣющихся станцій, на основаніи формулы (136), и сравниваемъ ихъ съ наблюденными промежутками времени T_0. Время наступленія землетрясенія въ эпицентрѣ извѣстно не точно и должно быть исправлено на нѣкоторую величину δx, такъ что наблюденные промежутки времени должны быть представлены въ видѣ $T_0 - \delta x$. Тогда результаты вычисленія выражаются рядомъ уравненій слѣдующаго типа:

$$T_0 - T_c = \delta x + \frac{\partial T}{\partial a}\delta a + \frac{\partial T}{\partial b}\delta b. \quad \ldots\ldots\ldots(143)$$

Величины δx, δa, δb опредѣлятся затѣмъ изъ совокупности всѣхъ наблюденій, по способу наименьшихъ квадратовъ, безъ всякаго произвола, неизбѣжно связаннаго съ примѣненіемъ графическаго способа. Сравненіе результатовъ вычисленій съ наблюденіями покажетъ далѣе, до какихъ предѣловъ величины a и b могутъ быть приняты за постоянныя, другими словами, насколько законъ (48) оправдается въ дѣйствительности.

Для практики удобнѣе искать не поправки δa и δb, а другія величины, непосредственно съ ними связанныя. Для этого введемъ новыя неизвѣстныя:

$$m = \sqrt{ab}, \quad \ldots\ldots\ldots(144)$$

$$n = \frac{2\sqrt{ab}\,R}{a - bR^2} \quad \ldots\ldots\ldots(145)$$

и опредѣлимъ поправки δm и δn. Для вычисленія коэффиціентовъ неизвѣстныхъ служатъ тогда формулы:

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{T}{m}, \quad \ldots\ldots\ldots(146)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\sin\alpha}{m\sqrt{1 + n^2\sin^2\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots(147)$$

§ 51. Возвращаемся, однако, къ задачѣ опредѣленія глубины очага землетрясенія. Въ этомъ случаѣ мы непосредственно получимъ два различныхъ выраженія, смотря по тому, разсмотримъ-ли мы внѣшнюю или внутреннюю область землетрясенія. Положимъ, что t_1 обозначаетъ время, необходимое для прохожденія дуги HS_1, относящейся къ внутренней области, а t_2 соотвѣтствуетъ дугѣ HS_2 внѣшней области. Предѣлы интеграловъ слѣдующіе:

$$t_1 = \int_0^{\alpha} dt - \int_0^{\varphi} dt; \quad t_2 = \int_0^{\alpha} dt + \int_0^{\varphi} dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (148)$$

Поэтому мы, помощью неопредѣленнаго интеграла (133), получимъ слѣдующія выраженія:

$$t_1 = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\left\{\lg\frac{1+2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha} - \lg\frac{1+2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right\}, \quad \ldots\ldots (149)$$

$$t_2 = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\left\{\lg\frac{1+2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha} + \lg\frac{1+2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right\}. \quad \ldots\ldots (150)$$

Легко соединить эти два выраженія въ одну общую формулу, относящуюся одинаково какъ къ внѣшней, такъ и къ внутренней области. Для этого замѣтимъ, что

$$-\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}(\theta_1 - \alpha); \quad +\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}(\theta_2 - \alpha).$$

Поэтому вмѣсто двухъ выраженій (149) и (150) можно написать просто

$$t = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\left\{\lg\frac{1+2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha} + \lg\frac{1+2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,(\theta-\alpha)}{1-2k\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,(\theta-\alpha)}\right\}, \quad \ldots\ldots (151)$$

гдѣ t и θ относятся безразлично къ внутренней или къ внѣшней области. Найденное выраженіе (151) представляетъ отвѣтъ на поставленный вопросъ; требуется только исключить изъ него $\mathrm{tg}\,\alpha$ и k. Для этого воспользуемся обозначеніями (111) и (112), которыя мы введемъ въ выраженіе (100), а вмѣсто k возьмемъ выраженіе (117). Тогда получится:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\nu - \mu\cos\theta}{\mu\sin\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (152)$$

Отсюда получимъ по извѣстнымъ формуламъ тригонометріи

$$\mathrm{tg}(\theta - \alpha) = \frac{\mu - \nu\cos\theta}{\nu\sin\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (153)$$

Введемъ выраженія (117), (152) и (153) въ формулу (151) и замѣтимъ, что, на основаніи (114) и (115):

$$2\sqrt{ab} = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (154)$$

Для сокращенія положимъ еще, что

$$P = (\nu - \mu\cos\theta)^2 + \lambda^2 \sin^2\theta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (155)$$

Тогда выраженіе (151) приметъ видъ:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\mu^2-\lambda^2}} \cdot \left\{ \lg \frac{\mu\sqrt{P} + \sqrt{\mu^2-\lambda^2}(\nu - \mu\cos\theta)}{\mu\sqrt{P} - \sqrt{\mu^2-\lambda^2}(\nu - \mu\cos\theta)} + \lg \frac{\nu\sqrt{P} + \sqrt{\mu^2-\lambda^2}(\mu - \nu\cos\theta)}{\nu\sqrt{P} - \sqrt{\mu^2-\lambda^2}(\mu - \nu\cos\theta)} \right\} \ldots\ldots (156)$$

Въ эту формулу входятъ уже только неизвѣстныя λ, μ, ν и уголъ θ.

§ 52. Для дальнѣйшаго упрощенія найденнаго выраженія помножаемъ числитель и знаменатель каждой дроби, стоящей подъ знакомъ логариѳма, на свой числитель, замѣняемъ сумму логариѳмовъ логариѳмомъ произведенія и извлекаемъ изъ этого произведенія квадратный корень. Тогда

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu^2-\lambda^2}} \lg \frac{\mu\nu - (\mu^2-\lambda^2)\cos\theta + \sqrt{P(\mu^2-\lambda^2)}}{\lambda\sqrt{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}} \ldots\ldots\ldots (157)$$

Это выраженіе можно написать въ весьма элегантномъ видѣ, при помощи слѣдующихъ обозначеній. Положимъ что

$$A = \mu\nu - (\mu^2-\lambda^2)\cos\theta = \mu\nu - \mu^2 + \lambda^2 + 2(\mu^2-\lambda^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \ldots (158)$$

$$B = \lambda\sqrt{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (159)$$

Тогда легко провѣрить, что

$$P(\mu^2-\lambda^2) = A^2 - B^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (160)$$

При помощи формулъ (158), (159) и (160) выраженіе (157) переходитъ въ слѣдующее

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu^2-\lambda^2}} \lg \left\{ \frac{A}{B} + \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2 - 1} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (161)$$

Въ этомъ выраженіи только A зависитъ отъ перемѣннаго угла θ; остальныя величины постоянны для даннаго землетрясенія. Полагая $\theta = 0$, мы получимъ изъ (161) время, необходимое для прохожденія сейсмическими волнами разстоянія HE отъ очага до эпицентра. Обозначимъ это время буквой t_0, а соотвѣтствующее значеніе A—буквой A_0, и обратимъ вниманіе на формулу (154). Тогда (158) и (161) переходятъ въ слѣдующія уравненія:

$$A = A_0 + 8ab \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (162)$$

$$t_0 = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \lg \left\{ \frac{A_0}{B} + \sqrt{\left(\frac{A_0}{B}\right)^2 - 1} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (163)$$

Для опредѣленія значенія частныхъ $\frac{A}{B}$ и $\frac{A_0}{B}$ введемъ въ выраженія (158), (159) и (162) первоначальныя величины a, b и h, помощью формулъ (111), (112) и (113). Тогда легко провѣрить, что

$$A_0 = \frac{(a - b R^2)[a - b(R-h)^2] + 2ab h^2}{R(R-h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (164)$$

$$B = \frac{(a - b R^2)[a - b(R-h)^2]}{R(R-h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (165)$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что частныя $\frac{A_0}{B}$ и $\frac{A}{B}$ вообще мало отличаются отъ единицы. Для частнаго $\frac{A}{B}$ это положеніе справедливо, пока θ не принимаетъ слишкомъ большихъ значеній. Положимъ поэтому

$$\vartheta = \frac{A}{B} - 1 = \frac{2ab\left[h^2 + 4R(R-h)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}{(a - b R^2)[a - b(R-n)^2]}, \quad \ldots\ldots\ldots (166)$$

$$\vartheta_0 = \frac{A_0}{B} - 1 = \frac{2ab h^2}{(a - b R^2)[a - b(R-h)^2]}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (167)$$

гдѣ ϑ и ϑ_0 меньше единицы въ интересующихъ насъ случаяхъ. Они представляютъ вообще малыя величины, по крайней мѣрѣ, пока θ не превышаетъ двухъ или трехъ десятковъ градусовъ. Мы можемъ, поэтому, написать (161) въ слѣдующемъ видѣ:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \lg \left\{ 1 + \vartheta + \sqrt{2\vartheta + \vartheta^2} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (168)$$

и развить это выраженіе въ рядъ по возрастающимъ степенямъ величины ϑ.

Пренебрегая третьей и высшими степенями величины ε, мы получимъ:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{2\vartheta}\left\{1 - \frac{1}{12}\vartheta + \frac{3}{160}\vartheta^2 \ldots\right\} \ldots$$

$$= \sqrt{\frac{h^2 + 4R\,(R-h)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(a - b\,R^2)\,[a - b\,(R-h)^2]}}\left\{1 - \frac{1}{12}\vartheta + \frac{3}{160}\vartheta^2 \ldots\right\}, \ldots\ldots\ldots (169)$$

$$t_0 = \frac{h}{\sqrt{(a - b\,R^2)\,[a - b\,(R-h)^2]}}\left\{1 - \frac{1}{12}\vartheta_0 + \ldots\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (170)$$

Эти формулы и представляютъ искомое рѣшеніе нашей задачи.

§ 53. Сравнивая найденныя выраженія (169) и (170) съ формулой (19), выведенной для прямолинейнаго распространенія сейсмическихъ движеній, мы убѣдимся, что въ первомъ приближеніи оба результата совпадаютъ, если только замѣнить постоянную скорость c скоростью

$$V = \sqrt{(a - b\,R^2)\,[a - b\,(R-h)^2]}, \ldots\ldots\ldots (171)$$

представляющей геометрическую среднюю изъ скоростей около поверхности земли и на глубинѣ очага. Вліяніе кривизны сейсмическаго луча выражается только членами высшаго порядка даннаго разложенія.

Для оцѣнки вліянія этихъ членовъ полагаемъ $R = 1$ и измѣряемъ время секундами. Тогда a, b и h, а также комбинаціи $a - b$, $a + b$, V, $\sqrt{ab}$ и т. п., всѣ величины одинаковаго порядка 10^{-3}. Положимъ для краткости

$$p = \frac{\sqrt{h^2 + 4\,(1-h)\sin^2\frac{\theta}{2}}}{V}, \ldots\ldots\ldots\ldots (172)$$

тогда

$$t = p - \frac{1}{6}ab\,p^3 + \frac{3}{40}(ab)^2 p^5 \ldots\ldots\ldots\ldots (173)$$

По даннымъ Wiechert'a [формула (73)] можно предположить

$$ab = 7.10^{-6}$$

для первой предварительной фазы. Второй членъ разложенія достигаетъ, слѣдовательно, $0^s.1$ только для $t = 45^s$ или $\theta = 3°$. Третій членъ разложенія достигаетъ той-же величины только для $t = 130^s$ или $\theta = 8°$. Промежутокъ времени t_0 выражается всегда первымъ членомъ разложенія (170) съ достаточной для практики точностью.

Время t не доступно прямому наблюденію. Можно опредѣлить только разность $t - t_0 = \tau$, которая, на основаніи предыдущихъ формулъ, выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\tau = p - \frac{h}{V} - \frac{1}{6} ab p^3 + \frac{3}{40} (ab)^2 p^5 \ldots\ldots\ldots\ldots (174)$$

На основаніи уравненія (174) можно вычислить промежутки времени τ, помощью приближенно принятыхъ значеній h, a, b, и сравнивать результаты вычисленія съ наблюденіями. Поправки принятыхъ величинъ опредѣляются, затѣмъ, по способу наименьшихъ квадратовъ, аналогично формулѣ (143). Легко видѣть, что величины a и b не могутъ быть опредѣлены отдѣльно только на основаніи наблюденій близкихъ къ эпицентру станцій, т.-е. пока членъ $\frac{1}{6} ab p^3$ очень малъ. Въ этомъ случаѣ постоянныя a и b входятъ только въ выраженіе V, которое можетъ быть развито въ рядъ по возрастающимъ степенямъ h. Полагая опять $R = 1$, имѣемъ въ первомъ приближеніи

$$V = a - b + hb \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (175)$$

Производныя $\frac{\partial V}{\partial a}$ и $\frac{\partial V}{\partial b}$ различаются только на постоянный множитель $(h - 1)$, такъ что отдѣльное опредѣленіе δa и δb не возможно. Замѣтимъ еще, что выраженіе (175) доказываетъ предположеніе Comas Solá (46).

§ 54. Неизвѣстными величинами нашей задачи являются вообще комбинаціи V, ab и глубина очага h, къ которымъ въ большинствѣ случаевъ при соединяется еще четвертая неизвѣстная δx — поправка принятаго момента землетрясенія въ эпицентрѣ. Аналогично формулѣ (143) имѣемъ

$$\tau_0 - \tau_c = \delta x + \frac{\partial \tau}{\partial h} \delta h + \frac{\partial \tau}{\partial V} \delta V + \frac{\partial \tau}{\partial (ab)} \delta (ab) \ldots\ldots\ldots (176)$$

Коэффиціенты неизвѣстныхъ, подробнымъ разсмотрѣніемъ которыхъ мы займемся въ будущей главѣ, представляются въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\partial \tau}{\partial h} = \frac{1}{V} \cdot \frac{h - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{h^2 + 4 (1 - h) \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} ab p^2 + \frac{3}{8} (ab)^2 p^4 \right\} - \frac{1}{V}, \quad (177)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial V} = - \frac{p}{V} \left\{ 1 - \frac{1}{2} ab p^2 + \frac{3}{8} (ab)^2 p^4 \right\} + \frac{t_0}{V}, \ldots\ldots\ldots\ldots (178)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial (ab)} = - \frac{1}{6} p^3 \left(1 - \frac{9}{10} ab p^2 \right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (179)$$

§ 55. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что на небольшихъ разстояніяхъ отъ эпицентра, съ достаточной точностью, можно принять сейсмическіе лучи за прямыя; на нѣсколько большихъ-же разстояніяхъ это предположеніе не допустимо. Поэтому способы опредѣленія глубины очага, основанные на свойствахъ замѣчательныхъ точекъ кривой пробѣга (точекъ u_0 и U_0 первой главы), не выдерживаютъ критики въ томъ видѣ, въ которомъ они предложены до сихъ поръ.

Легко доказать справедливость этого положенія для точки перегиба кривой пробѣга. Для опредѣленія этой точки найдемъ, на основаніи формулъ (61) и (117):

$$\frac{d^2\tau}{d\theta^2} = \frac{dk}{d\theta} = \frac{(\nu - \mu\cos\theta)(\nu\cos\theta - \mu)}{[(\nu - \mu\cos\theta)^2 + \lambda^2\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (180)$$

Приравнявъ числитель этого выраженія нулю, мы найдемъ уголъ χ, соотвѣтствующій точкѣ перегиба. Формула (180) даетъ для этого угла два рѣшенія, изъ которыхъ одно мнимое. Другое дѣйствительное рѣшеніе будетъ

$$\cos\chi = \frac{\mu}{\nu} = \frac{(R-h)(a+bR^2)}{R[a+b(R-h)^2]}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (181)$$

ибо

$$\nu - \mu > 0 \quad \text{и} \quad \nu > \mu,$$

какъ видно изъ формулъ (112), (113) и (105). Формула (181) аналогична формулѣ (28), но значительно сложнѣе послѣдней. Въ (181) входятъ постоянныя a и b, такъ что опредѣленіе глубины очага по одному только углу χ невозможно. Легко найти приближенное выраженіе, аналогичное формулѣ (29). Для этого положимъ $R=1$, вычисляемъ выраженіе $1-\cos\chi$ и принебрегаемъ h^2 въ числителѣ и h въ знаменателѣ. Тогда получимъ

$$h = 2\sin^2\frac{\chi}{2}\cdot\frac{a+b}{a-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (182)$$

Эта формула отличается отъ формулы (29) множителемъ $\frac{a+b}{a-b}$, который по Wiechert'у [формула (73)] приблизительно равняется 5. Отсюда слѣдуетъ, что глубины, вычисленныя на основаніи (29), должны быть увеличены приблизительно въ пять разъ, вслѣдствіе кривизны сейсмическаго луча. Зона минимальной поверхностной скорости находится, слѣдовательно, значительно ближе къ эпицентру, чѣмъ можно ожидать на основаніи простой теоріи прямолинейныхъ сейсмическихъ лучей.

Такой результатъ представляется намъ немаловажнымъ, такъ какъ онъ до нѣкоторой степени позволяетъ оцѣнить глубину очага, на основаніи формы кривой пробѣга. Формула (182) доказываетъ далѣе, что форма

кривой пробѣга въ высокой степени зависитъ отъ распредѣленія скоростей внутри земли. Небольшіе члены высшаго порядка формулы (174), не измѣняющія въ значительной степени абсолютныя величины моментовъ τ, всетаки кореннымъ образомъ видоизмѣняютъ форму кривой пробѣга.

§ 56. Аналогичныя замѣчанія относятся и къ точкѣ Руцкаго. Основное уравненіе (32) для этой точки можно, при помощи (61), написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$k\theta = \tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (183)$$

Въ это уравненіе вмѣсто k слѣдуетъ подставить его значеніе изъ (117), а вмѣсто τ его значеніе изъ (161) и (163), или просто выраженіе (174). Видоизмѣненное такимъ образомъ уравненіе (183) и представитъ уголъ θ, соотвѣтствующій точкѣ Руцкаго, какъ функцію величинъ h, a и b. Изъ этого уравненія и слѣдовало-бы вывести h, какъ функцію отъ θ, a и b. Уравненіе это имѣетъ, однако, довольно сложный видъ. Постоянныя a и b изъ него не исключаются, такъ что опредѣленіе глубины по одному только углу θ невозможно. Опредѣливъ же эти постоянныя какимъ нибудь инымъ путемъ, напримѣръ, на основаніи формулъ (137) до (142), или, принимая просто выраженіе (73), можно рѣшить уравненіе (183) путемъ интерполяціи. Принимая какую нибудь произвольную величину h, можно вычислить обѣ стороны уравненія (183) для ряда угловъ θ, выбранныхъ надлежащимъ образомъ и по получаемой такимъ образомъ табличкѣ, опредѣлить тотъ уголъ θ, для котораго обѣ стороны уравненія (183) становятся равными. Повторяя эти вычисленія для цѣлаго ряда величинъ h, можно найти искомую зависимость между глубиной h и угломъ θ, соотвѣтствующимъ точкѣ Руцкаго, который мы раньше (формулы (37) и (40)) обозначали буквой γ. Изложеннымъ путемъ получена слѣдующая табличка, основаніемъ которой служило выраженіе (73).

h	γ	
20 км.	7.3°	810 км.
40	8.8	980
60	10.0	1110
80	11.2	1250
100	12.2	1360
120	13.2	1470

Для составленія таблички промежутки τ были вычислены съ точностью до $0^s.1$, что соотвѣтствуетъ точности угловъ около $0^\circ.1 — 0^\circ.2$; радіусъ земли былъ принятъ $= 6370$ км., какъ и раньше.

Сравнивая эту табличку съ табличкой (см. § 23), полученной на основаніи формулъ (37) и (40), мы видимъ, что глубины увеличиваются приблизительно въ 20 разъ, вслѣдствіе кривизны сейсмическихъ лучей. Точка Рупкаго значительно чувствительнѣе къ измѣненіямъ скоростей внутри земли, чѣмъ точка перегиба.

Все сказанное подтверждаетъ заключенія, къ которымъ мы пришли уже въ первой главѣ, разбирая способы опредѣленія глубины очага по одной какой нибудь выдающейся точкѣ кривой пробѣга. Необходима крайняя осторожность при построеніи этой кривой, а выводы, основанные на одной только изъ разсмотрѣнныхъ точекъ, представляютъ лишь довольно грубое приближеніе.

Выведенныя въ настоящей главѣ формулы исчерпываютъ поставленную задачу съ теоретической стороны при сдѣланныхъ нами допущеніяхъ. Онѣ представляютъ основаніе для дальнѣйшихъ практическихъ вычисленій. Числовыхъ величинъ мы до сихъ поръ касались лишь изрѣдка и вопросъ о томъ, что вообще могутъ дать наблюденія и съ какой точностью приходится считаться, нами почти не затронутъ. Этой задачѣ посвящается слѣдующая глава.

Глава IV.

Обзоръ основныхъ данныхъ наблюденій.

§ 57. Опредѣленіе глубины очага землетрясенія по существу задача геометрическая. Предполагая законъ распространенія сейсмическихъ волнъ внутри земли извѣстнымъ, можно по двумъ направленіямъ сейсмическаго луча, наблюденнымъ въ двухъ точкахъ земной поверхности, и по разстоянію этихъ точекъ опредѣлить положеніе очага или гипоцентра.

Такая простая формулировка задачи, къ сожалѣнію, не соотвѣтствуетъ условіямъ практики. Искомый уголъ опредѣляется по амплитудамъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ составляющихъ движенія почвы. Изъ нихъ вертикальная составляющая представляетъ наибольшія теоретическія и практическія затрудненія. Она наблюдается лишь на немногихъ станціяхъ и опредѣленіе истиннаго смѣщенія почвы или, по крайней мѣрѣ, сравнимость записи съ показаніями горизонтальныхъ составляющихъ возможна только въ рѣдкихъ случаяхъ. Задача такимъ образомъ естественно распадается на двѣ части: на нахожденіе ортогональной проекціи очага на земную поверхность, т.-е. на опредѣленіе т. н. *эпицентра*, и на вычисленіе глубины очага или *гипоцентра*.

Такое раздѣленіе задачи имѣетъ значительныя преимущества. Можно опредѣлить отдѣльно эпицентръ по даннымъ *одного* рода, а затѣмъ глубину гипоцентра по даннымъ *другого* рода. Такой порядокъ выполненія задачи и подразумѣвался все время въ предъидущихъ главахъ, въ которыхъ положеніе эпицентра всегда предполагалось извѣстнымъ. Попытку, опредѣлить одновременно и координаты эпицентра и глубину очага, нужно считать неудачной; объ этомъ свидѣтельствуетъ приведенный выше тщетный опытъ Kövesligethy[1]).

---

[1]) R. v. Kövesligethy. Vorläufige Elementenbestimmung des Ceramhebens. Beitr. zur Geophys. VIII, 1907, стр. 400—451.

§ 58. Нѣтъ надобности распространяться здѣсь о многочисленныхъ методахъ опредѣленія эпицентра, вошедшихъ большею частью уже въ ежедневную практику. Отмѣтимъ только, что положеніе эпицентра по инструментальнымъ наблюденіямъ *отдаленныхъ* станцій опредѣляется довольно неточно. Въ одномъ спеціальномъ, правда, довольно неблагопріятномъ случаѣ, я нашелъ[1]) на основаніи разностей временъ наступленія первой и второй предварительной фазы среднюю ошибку положенія эпицентра равную 1°—2° большого круга. Въ другихъ болѣе благопріятныхъ случаяхъ по тому-же методу получались ошибки почти одинаковой величины[2]). Другой способъ опредѣленія положенія эпицентра основанъ на наблюденіяхъ абсолютныхъ моментовъ наступленія одной какой-нибудь фазы, обыкновенно первой предварительной. Еще недавно былъ опубликованъ тщательно обработанный примѣръ примѣненія этого метода[3]). Ошибка получилась немного меньше 1°.

Такая точность недостаточна для задачи опредѣленія глубины очага. Но помимо того, примѣненіе названныхъ способовъ привело бы даже къ принципіальной ошибкѣ. Эти способы выработаны на основаніи предположенія, что глубиной очага можно пренебречь. Они, слѣдовательно, въ нашемъ случаѣ непримѣнимы.

Несравненно точнѣе опредѣленіе положенія эпицентра по макросейсмическимъ наблюденіямъ. Этимъ путемъ нерѣдко достигается точность до немногихъ минутъ дуги большого круга, иногда даже до 1—2 км., и поэтому при всѣхъ прежнихъ попыткахъ опредѣленія глубины очага положеніе эпицентра опредѣлялось на основаніи макросейсмическихъ данныхъ. Задача, однако, далеко не всегда представляется въ столь благопріятномъ видѣ. Во многихъ случаяхъ изосейсты даже высшихъ балловъ отличаются большой неправильностью и точное опредѣленіе положенія эпицентра становится невозможнымъ. Въ другихъ, болѣе благопріятныхъ случаяхъ удается обнаружить два или болѣе различныхъ эпицентровъ[4]). Въ такихъ случаяхъ можетъ возникать сомнѣніе, къ которому изъ нихъ слѣдуетъ отнести тѣ данныя, на основаніи которыхъ вычисляется глубина очага. Вообще по макросейсмическимъ наблюденіямъ опредѣляются точки максимальныхъ

---

[1]) Elmar Rosenthal. Bestimmung des Epizentrums des Nordpazifischen Bebens vom 17. August 1906. Изв. Пост. Центр. Сейсм. Ком. III, 2, № 2.

[2]) См. напр. Fürst B. Galitzin. Das Erdbeben vom 22. Januar 1910. Изв. Имп. Акад. Наукъ 1910 стр. 211—216.

[3]) L. Geiger. Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten. Nachrichten K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1910, № 4, стр. 331—349.

[4]) См. напр. Charles Davison. Twin Earthquakes. Quart. Journ. Geolog. Soc. *m. 61* № 241, стр. 18—33.

ускореній. Соотвѣтствуетъ-ли имъ точка, изъ которой исходятъ слабыя колебанія, измѣряемыя сейсмографами, — это открытый еще вопросъ.

§ 59. Для строгаго рѣшенія поставленной задачи требуется поэтому методъ, основанный исключительно на инструментальныхъ данныхъ, и при томъ такой, который не требуетъ никакихъ предположеній о глубинѣ очага землетрясенія. Такой методъ разработанъ сравнительно недавно княземъ Б. Б. Голицынымъ[1]). Онъ состоитъ въ опредѣленіи азимута направленія къ очагу по двумъ горизонтальнымъ составляющимъ движенія почвы. Способъ этотъ былъ приложенъ авторомъ къ опредѣленію положенія эпицентровъ отдаленныхъ землетрясеній по одной станціи въ Пулковѣ. Благодаря высокой чувствительности установленныхъ авторомъ приборовъ, азимуты опредѣлялись по первымъ колебаніямъ малой амплитуды съ точностью до 1°—2°. Положеніе эпицентра землетрясенія, находящагося напр. на разстояніи 5000 км., опредѣляется этимъ путемъ съ точностью до 100—150 км., не говоря объ ошибкѣ разстоянія до станціи. Гораздо выгоднѣе примѣненіе указаннаго способа къ *близкимъ* землетрясеніямъ. Амплитуды первыхъ колебаній въ этихъ случаяхъ такъ велики, что даже мало чувствительные маятники даютъ довольно точныя величины. Если періодъ двухъ составляющихъ одинаковъ, то можно брать просто отношеніе ординатъ по записи, помноженное на отношеніе множителей увеличенія. Большею частью даже періодъ движенія почвы настолько малъ по сравненію съ періодомъ маятниковъ, что достаточно брать увеличеніе для безконечно скорыхъ колебаній. Даже сравнительно большая ошибка опредѣленнаго такимъ образомъ азимута замѣтно не вліяетъ на положеніе эпицентра, если только станція находится на достаточно близкомъ разстояніи отъ него. Для разстоянія въ 50 км., напр., ошибка на 5° по азимуту обусловливала бы ошибку всего въ 4—5 км. положенія эпицентра. Имѣя по крайней мѣрѣ двѣ станціи, не лежащихъ на одной прямой съ эпицентромъ, можно опредѣлить положеніе его безъ всякой неопредѣленности, независимо отъ того, будетъ-ли волна, записанная приборами, волной сгущенія или расширенія, и независимо отъ какихъ-либо эмпирическихъ формулъ опредѣляющихъ разстояніе очага. Очевидно, что достаточное число станцій, распредѣленныхъ по всевозможнымъ направленіямъ около эпицентра, даетъ возможность достигать высокой степени точности.

---

[1]) Fürst B. Galitzin. Zur Frage der Bestimmung des Azimuts des Epizentrums eines Bebens. Изв. Имп. Акад. Наукъ. 1909 г., стр. 999—1012.

Его-же. Sur la détermination de l'épicentre d'un tremblement de terre d'après les données d'une seule station sismique. Comptes-Rend. hebdom. 7 et 21 mars 1910.

Его-же. Bestimmung der Lage des Epizentrums eines Bebens aus den Angaben einer einzelnen seismischen Station. Изв. Имп. Акад. Наукъ. 1911 г., стр. 941—957.

Существуетъ, слѣдовательно, методъ для точнаго опредѣленія положенія проекціи гипоцентра на земную поверхность независимо отъ макросейсмическихъ явленій, такъ что возможныя недоразумѣнія, возникающія вслѣдствіе неправильной формы изосейстъ, устраняются. Точность найденнаго положенія эпицентра въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ поддается числовой оцѣнкѣ и, такимъ образомъ, основное предположеніе предъидущихъ главъ, что положеніе эпицентра, а слѣдовательно и эпицентральныя разстоянія станцій извѣстны, оправдалось.

§ 60. Казалось бы, что подобнымъ-же простымъ путемъ можно опредѣлить и глубину очага землетрясенія. Такое рѣшеніе задачи затрудняется, однако, рядомъ своеобразныхъ обстоятельствъ, весьма обстоятельно и ясно изложенныхъ въ одной изъ послѣднихъ работъ князя Б. Б. Голицына[1]). Первое затрудненіе — техническаго характера. Оно состоитъ въ опредѣленіи истиннаго смѣщенія почвы по тремъ составляющимъ, изъ которыхъ вертикальная составляющая измѣряется приборами совсѣмъ иного типа, чѣмъ горизонтальныя. Собственный періодъ вертикальныхъ сейсмографовъ обыкновенно довольно малъ, такъ что опредѣленіе истиннаго движенія почвы усложняется. Инструменты этого типа даже мало распространены. Вслѣдствіе этихъ обстоятельствъ только въ рѣдкихъ случаяхъ возможно достаточно точное опредѣленіе смѣщенія почвы.

Другое затрудненіе является слѣдствіемъ физическихъ условій отраженія упругой волны отъ земной поверхности. Этотъ вопросъ выясненъ приведенными уже работами Schuster'a и Wiechert'a. Допустимъ, что продольная волна встрѣчаетъ земную поверхность подъ угломъ паденія i_1. Тогда отъ этой поверхности отражаются двѣ волны: продольная подъ угломъ отраженія i_1, распространяющаяся со скоростью v_0, и поперечная подъ угломъ i_2, распространяющаяся со скоростью w_0. «Поверхностную» скорость обозначимъ, какъ и прежде, буквой u. Уравненіе (49) для этихъ двухъ волнъ пишется такъ:

$$\sin i_1 = \frac{v_0}{u};\ \sin i_2 = \frac{w_0}{u}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (184)$$

такъ что

$$\sin i_1 : \sin i_2 = \cos \varepsilon_1 : \cos \varepsilon_2 = v_0 : w_0, \quad \ldots\ldots\ldots (185)$$

гдѣ ε_1 и ε_2 — «истинные» углы выхода, соотвѣтствующіе угламъ отраженія i_1 и i_2. Условіе, что на земной поверхности упругія натяженія равняются

---

[1]) Fürst B. Galitzin. Beobachtungen über die Vertikalkomponente der Bodenbewegung. Изв. Имп. Акад. Наукъ. 1911 г., стр. 983—1006.

нулю, по Wiechert'у выражается уравненіемъ

$$i_0 = 2i_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (186)$$

гдѣ i_0 тотъ уголъ, по которому «видимо» подходитъ продольная волна.

Дополненіе угла i_0, т.-е. $\bar{\varepsilon} = 90 - i_0$, и представляетъ «видимый» уголъ выхода. При помощи этого обозначенія, изъ формулъ (185) и (186), получаются слѣдующія соотношенія:

$$\sin\bar{\varepsilon} = 1 - 2\left(\frac{w_0}{v_0}\right)^2 \cos^2\varepsilon_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (187)$$

$$\sin\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{4w_0^2 - 2v_0^2(1-\sin\bar{\varepsilon})}}{2w_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (188)$$

По этимъ формуламъ можно опредѣлить уголъ ε_1, обозначенный нами раньше просто буквой ε, если извѣстенъ уголъ $\bar{\varepsilon}$ и наоборотъ. Кромѣ того должно быть извѣстно отношеніе скоростей v_0 и w_0, которыя можно опредѣлить по кривымъ пробѣга для первой и второй предварительной фазы землетрясенія.

§ 61. Основная формула (186) выведена Wiechert'омъ въ предположеніи, что наружная кора земли обладаетъ однородной структурой. Это предположеніе, конечно, неточно; дѣйствительная структура верхнихъ пластовъ должна оказать замѣтное вліяніе на уголъ $\bar{\varepsilon}$. Поэтому понятно, что наблюденія въ Пулковѣ обнаружили замѣтныя отступленія измѣренныхъ угловъ $\bar{\varepsilon}$ отъ теоретическихъ — впрочемъ не вполнѣ достовѣрныхъ — угловъ. Отступленія иногда доходили до 16°, большею частью же оставались въ предѣлахъ 2°—5°. На этомъ основаніи можно думать, что вліяніе верхнихъ пластовъ будетъ вообще не велико и на наблюденіяхъ различныхъ станцій будетъ отзываться какъ случайная ошибка. Въ среднемъ изъ большого числа станцій оно болѣе или менѣе исключится. Такимъ образомъ представляется возможность, хотя и довольно сложнымъ путемъ, всетаки опредѣлить дѣйствительный уголъ ε.

Тогда, наконецъ, можно приступить къ примѣненію формулъ (121) или (122) для опредѣленія глубины очага землетрясенія, при чемъ является опять затрудненіе, состоящее въ опредѣленіи величинъ λ или $\frac{a+bR^2}{a-bR^2}$. Изъ всего сказаннаго выходитъ, что наблюденія одного только угла выхода не достаточны для опредѣленія глубины очага, а нужно непремѣнно располагать еще данными кривой пробѣга. Примѣненіе изложеннаго способа — дѣло будущаго; все-же возможность такихъ опредѣленій уже теперь выяснена.

Аналогичныя замѣчанія относятся и къ способу Kövesligethy, изложенному въ первой главѣ. Сдѣланныя тамъ возраженія касаются главнымъ образомъ достоинства макросейсмическихъ наблюденій и устранялись бы примѣненіемъ способа къ истиннымъ амплитудамъ смѣщенія почвы, опредѣленнымъ по точнымъ инструментальнымъ даннымъ. Длину сейсмическаго луча слѣдовало бы вычислять по формуламъ (84) и (117). Для небольшихъ разстояній отъ эпицентра, впрочемъ, и простая формула (17) достаточно точна. Такъ, напр., для глубины $h = 100$ км. и для разстоянія $\Delta = 200$ км. формулы (84) и (117) съ постоянными Wiechert'a [формула (73)] даютъ $s = 222.3$ км., между тѣмъ какъ по простой формулѣ (17) получается $s = 223.6$ км.

Въ настоящее время нѣтъ никакой возможности, примѣнить способъ Kövesligethy къ инструментальнымъ наблюденіямъ и нельзя даже надѣяться на осуществленіе такой возможности въ ближайшемъ будущемъ.

Поэтому, соотвѣтствующая переработка этого способа лишена практическаго значенія, а достижимая имъ точность не поддается оцѣнкѣ.

§ 62. Единственными достовѣрными данными, которыми располагаетъ современная наука, являются моменты наступленія фазъ землетрясенія, при чемъ на станціяхъ, близкихъ къ очагу, въ большинствѣ случаевъ только начало первой предварительной фазы можетъ быть отмѣчено безъ сомнѣнія. Поэтому формула (174) представляетъ пока единственное достовѣрное средство для опредѣленія глубины очага землетрясенія. Къ сожалѣнію эта формула допускаетъ только весьма скромную точность. Для того, чтобы дать наглядное представленіе о тѣхъ величинахъ, съ которыми приходится имѣть дѣло, мы сообщимъ въ слѣдующемъ табличку нѣкоторыхъ промежутковъ времени τ, вычисленныхъ для случаевъ $h = 100$ км. и $h = 0$. Постоянныя a и b взяты по формулѣ (73); скорость V вычислена по формулѣ (175). Поправочные члены формулы (174) приведены отдѣльно, чтобы дать понятіе о величинѣ ихъ.

Изъ предлагаемой таблицы видно, что вліяніе глубины $h = 100$ км. выражается всего нѣсколькими секундами. Такъ какъ наблюденія сейсмическихъ станцій въ лучшемъ случаѣ достигаютъ точности 1^s, то возможны только опредѣленія глубинъ въ десяткахъ километровъ; меньшія глубины этимъ путемъ не опредѣляются.

§ 63. Нужно обратить, однако, вниманіе еще на одно обстоятельство, затрудняющее опредѣленіе глубины очага. Точное время наступленія землетрясенія въ эпицентрѣ не извѣстно, а опредѣляется вообще путемъ

экстраполяціи по одной или нѣсколькимъ станціямъ, ближайшимъ къ эпицентру.

θ	$h=100$ км.; $\frac{h}{V}=t_0=13^c.5$				$h=0$		
	p	$-\frac{1}{6}ab\,p^3$	$\frac{3}{40}(ab)^2p^5$	τ	p	сумма поправокъ	τ
	c			c	c		c
0° 20′	14.4	—	—	0.9	5.2	—	5.2
0 40	16.8	—	—	3.3	10.3	—	10.3
1 0	20.2	—	—	6.7	15.5	—	15.5
2	32.8	—	—	19.3	31.0	—	31.0
	c	c				c	
3	46.8	— 0.1	—	33.2	46.5	— 0.1	46.4
4	61.3	— 0.3	—	47.5	62.0	— 0.3	61.7
5	75.8	— 0.5	—	61.8	77.5	— 0.6	76.9
6	90.5	— 0.9	—	76.1	93.0	— 1.0	92.0
7	105.3	— 1.4	—	90.4	108.4	— 1.5	106.9
			c				
8	120.1	— 2.0	+ 0.1	104.7	123.9	— 2.1	121.8
9	134.8	— 2.9	+ 0.1	118.5	139.4	— 3.0	136.4
10	149.4	— 4.0	+ 0.3	132.2	154.9	— 4.0	150.9
11	164.4	— 5.2	+ 0.5	146.2	170.2	— 5.3	164.9
12	179.3	— 6.8	+ 0.7	159.7	185.7	— 6.7	179.0
13	194.1	— 8.6	+ 1.0	173.0	201.1	— 8.3	192.8
14	208.8	—10.7	+ 1.5	186.1	216.5	—10.1	206.4
15	223.7	—13.2	+ 2.1	199.1	231.8	—12.2	219.6

Если бы даже сейсмическая станція находилась какъ разъ въ эпицентрѣ, то все-же возможна хотя-бы небольшая ошибка въ опредѣленіи времени. Поэтому пришлось ввести въ формулу (176) неизвѣстную δx съ постояннымъ коэффиціентомъ, къ которой еще слѣдуетъ присоединить постоянныя части коэффиціентовъ другихъ неизвѣстныхъ. Это обстоятельство является роковымъ для успѣшнаго рѣшенія нашей задачи: мы имѣемъ дѣло не съ абсолютными величинами τ, а только съ ихъ разностями. Аналитическое выраженіе этого обстоятельства слѣдующее. Положимъ для краткости:

$$f=1-\frac{1}{2}abp^2+\frac{3}{8}(ab)^2p^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (189)$$

Тогда основное уравненіе (176) при помощи формулъ (177), (178), (179) и (189) представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\tau_0 - \tau_c = \left(\delta x - \frac{\delta h}{V} + \frac{t_0}{V}\delta V\right) +$$

$$+ \frac{f}{V} \cdot \frac{h - 2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{h^2 + 4(1-h)\sin^2\frac{\theta}{2}}} \cdot \delta h - \frac{pf}{V}\delta V - \frac{1}{6}p^3(1 - 0{\cdot}9\,abp^2)\,\delta(ab) \ldots.(190)$$

Возьмемъ среднее изъ всѣхъ имѣющихся уравненій типа (190) и вычтемъ изъ него каждое уравненіе въ отдѣльности. Неизвѣстная въ скобкахъ тогда сократится и мы хотя и имѣемъ дѣло съ меньшимъ числомъ неизвѣстныхъ, но вмѣсто величинъ $\tau_0 - \tau_c$ и коэффиціентовъ формулы (190) имѣемъ только отступленія отъ средняго ихъ значенія. Этотъ способъ, впрочемъ, нѣсколько облегчаетъ вычисленія; опредѣленіе же неизвѣстной въ скобкахъ не представляетъ особеннаго интереса.

§ 64. Важное значеніе имѣетъ еще слѣдующее обстоятельство, о которомъ уже раньше неоднократно говорилось. Глубина h входитъ въ формулу (174) за исключеніемъ постояннаго члена $\frac{h}{V}$ только неявно въ видѣ выраженія p. Это выраженіе (172) варіируетъ въ зависимости отъ h въ замѣтной степени только до тѣхъ поръ, пока h^2 не исчезаетъ по сравненію съ $4(1-h)\sin^2\frac{\theta}{2}$, или пока h не исчезаетъ по сравненію съ $2\sin\frac{\theta}{2}$. За этимъ предѣломъ h въ выраженіе p отдѣльно уже не входитъ, а вліяетъ только на скорость V. Поэтому глубина h можетъ быть опредѣлена только по наблюденіямъ станцій, эпицентральное разстояніе которыхъ сравнимо съ величиной h, т.-е. въ крайнемъ случаѣ примѣрно до $\Delta = 10h$. Съ другой стороны, не зная h, нельзя и опредѣлить абсолютную величину скорости. Поэтому и нельзя ограничиться опредѣленіемъ одной неизвѣстной h, принимая напр. для скорости числа (73), найденныя Wiechert'омъ. Эти скорости, впрочемъ, первоначально были опредѣлены на основаніи только трехъ землетрясеній, изъ которыхъ только одно — Калабрійское землетрясеніе 8-го сентября 1905 г. — наблюдалось на эпицентральныхъ разстояніяхъ меньше 1000 км. О матеріалахъ, служившихъ для позднѣйшей переработки найденныхъ этимъ путемъ чиселъ, ничего не извѣстно.

На основаніи сказаннаго задача состоитъ главнымъ образомъ въ опредѣленіи неизвѣстныхъ h и V по наблюденіямъ близкихъ къ эпицентру станцій. Неизвѣстная ab входитъ въ задачу только въ видѣ небольшихъ поправокъ и не можетъ быть опредѣлена совмѣстно съ другими неизвѣстными, за исключеніемъ развѣ случаевъ очень большихъ глубинъ. Необхо-

димо, слѣдовательно, опредѣлять ab отдѣльно по наблюденіямъ, главнымъ образомъ, болѣе отдаленныхъ станцій, а затѣмъ при помощи найденной такимъ образомъ величины исправлять наблюденія ближайшихъ станцій, служащихъ для опредѣленія глубины. Въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ самостоятельное опредѣленіе произведенія ab невозможно, приходится пока пользоваться величиною, вытекающей изъ выраженія (73):

$$\log(ab) = 4.847 - 10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (191)$$

Замѣтимъ еще, что коэффиціенты формулы (190) представляютъ величины различнаго порядка, такъ что до начала вычисленій необходимо, сдѣлать ихъ однородными. Это можетъ быть достигнуто съ достаточнымъ приближеніемъ введеніемъ слѣдующихъ новыхъ неизвѣстныхъ:

$$\delta V = \psi \cdot 10^{-4}; \quad \delta h = \zeta \cdot 10^{-2}; \quad \delta(ab) = \omega \cdot 10^{-6} \quad \ldots. (192)$$

Множитель f всегда близокъ къ 1 и варіируетъ медленно для станцій, близкихъ къ эпицентру. Удобнѣе всего вычислять для него небольшую табличку на основаніи (189).

§ 65. Для примѣненія формулы (190) необходимо сдѣлать какое-нибудь предположеніе относительно величины h; да и вообще желательно знать до начала вычисленій, можно-ли надѣяться на положительный результатъ. Съ этой цѣлью нужно сначала искать удовлетворительное представленіе наблюденій, полагая $h = 0$. Въ этомъ случаѣ и $t_0 = 0$ и формула (190) принимаетъ видъ

$$\tau_0 - \tau_c = \delta x - \frac{\delta h}{V} - f p_0 \left(\frac{1}{2} \delta h + \frac{\delta V}{V} \right), \quad \ldots\ldots\ldots (193)$$

гдѣ неизвѣстная $\delta(ab)$ пропущена, а величина p для случая $h = 0$ обозначена знакомъ p_0. Уравненіе (193) опредѣляетъ двѣ неизвѣстныхъ:

$$\xi = \delta x - \frac{1}{V} \delta h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (194)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \delta h + \frac{\delta V}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (195)$$

Изъ нихъ величина η не позволяетъ оцѣнки δh, такъ какъ $\frac{\delta V}{V}$ можетъ имѣть значительно большее значеніе чѣмъ $\frac{1}{2} \delta h$. Уравненіе-же (194) можетъ привести къ приближенной оцѣнкѣ δh. До начала вычисленія опредѣляемъ моментъ x наступленія землетрясенія въ эпицентрѣ, полагая $h = 0$ и поль-

зуясь приближеннымъ значеніемъ скорости. Уравненіе (194) напишемъ такъ:

$$\delta h = V(\delta x - \xi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (196)$$

Положимъ, что для опредѣленія x служила надежная станція, близкая къ эпицентру. Тогда, помимо небольшой ошибки опредѣленія времени на данной станціи, δx должно быть больше нуля. Если, на основаніи вычисленія по формулѣ (193), ξ окажется величиной отрицательной, то формула (196) даетъ возможность, постепенными приближеніями оцѣнивать величину δh. Найденная такимъ образомъ величина и можетъ служить основаніемъ для болѣе точныхъ вычисленій по формулѣ (190). Если-же ξ окажется положительнымъ и при томъ не меньше допустимой положительной величины δx, тогда нѣтъ надежды на успѣшное опредѣленіе глубины.

§ 66. Во время всего предыдущаго разсужденія имѣлась въ виду первая фаза землетрясенія или самое начало записи. Съ одинаковымъ теоретическимъ правомъ можно было бы распространить изложенный методъ и на моменты наступленія второй фазы или поперечныхъ волнъ. Для этихъ волнъ Wiechert'омъ была найдена такая-же закономѣрность, какъ и для продольныхъ. Соотвѣтствующія числовыя значенія представлены въ слѣдующей табличкѣ [1]), аналогичной табличкѣ въ § 38.

r		w	
въ км.	$R=1$	въ км.	$R=1$
6367	1.000	4.00	0.000 628
6267	0.985	4.24	0.000 666
6167	0.969	4.47	0.000 702
6067	0.953	4.70	0.000 738
5967	0.937	4.93	0.000 774
5867	0.922	5.15	0.000 809
5767	0.906	5.37	0.000 843
5667	0.890	5.59	0.000 878

1) K. Zöppritz und L. Geiger. Über Erdbebenwellen. III. Nachr. K. Ges. zu Göttingen 1909, № 4, стр. 423.

Эти скорости могутъ быть представлены уравненіемъ, подобнымъ уравненію (73), а именно:

$$w = 0.001829 - 0.001201\, r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (197)$$

Сравнивая скорости v и w, мы видимъ, что ихъ отношеніе представляетъ постоянную на всѣхъ глубинахъ величину, а именно:

$$\frac{w}{v} = 0.559 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (198)$$

Теоретическая возможность, использовать для опредѣленія глубины очага и моменты наступленія второй фазы, на практикѣ устраняется тѣмъ обстоятельствомъ, что эта фаза на близкихъ къ эпицентру станціяхъ не отмѣчается въ такомъ видѣ, чтобы дать возможность безукоризненнаго распознаванія ея. Сообщаемыя въ рѣдкихъ случаяхъ съ близкихъ станцій моменты наступленія второй фазы крайне сомнительны.

§ 67. Это обстоятельство устраняетъ также возможность, примѣнить разности моментовъ наступленія первой и второй фазы къ опредѣленію глубины очага, между тѣмъ какъ эти разности съ успѣхомъ примѣняются къ опредѣленію положенія эпицентра отдаленнаго землетрясенія. Легко видѣть, что распространеніе этого метода на интересующую насъ здѣсь задачу и по разнымъ другимъ причинамъ не обѣщаетъ успѣха. Для этого положимъ, что малые поправочные члены развитія (174) не имѣютъ вліянія или что наблюденные моменты уже исправлены на эти величины. Тогда разность моментовъ наступленія первой и второй фазы выразится просто въ видѣ разности двухъ выраженій вида (172), въ которыхъ скорость V замѣнена скоростью той или другой фазы землетрясенія. Обозначимъ эти выраженія соотвѣтственно первой и второй фазѣ буквами p_1 и p_2, а скорости буквами v_1 и v_2 и положимъ для сокращенія:

$$4(1-h)\sin^2\frac{\theta}{2} = \sigma^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (199)$$

Тогда получимъ для разности моментовъ наступленія первой и второй фазы выраженіе:

$$p_2 - p_1 = \frac{\sqrt{h^2+\sigma^2}}{v_2} - \frac{\sqrt{h^2+\sigma^2}}{v_1} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2}\sqrt{h^2+\sigma^2} \ldots\ldots (200)$$

Полагая въ первомъ приближеніи, что σ не зависитъ отъ h, мы изъ

(200) получимъ для опредѣленія глубины слѣдующее рѣшеніе:

$$h^2 = \left[\frac{1}{\frac{v_1}{v_2}-1}\cdot v_1(p_2-p_1)\right]^2 - \sigma^2 = \left[\frac{1}{1-\frac{v_2}{v_1}}v_2(p_2-p_1)\right]^2 - \sigma^2 \ldots.(201)$$

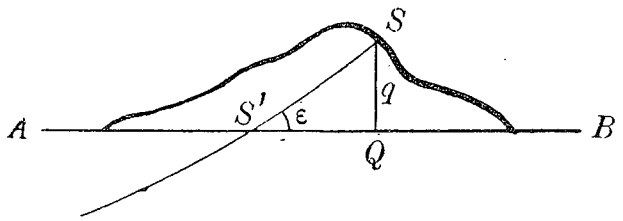
Пока неизвѣстно, на сколько числа, найденныя по способу Wiechert'a для скоростей v_1 и v_2, приложимы къ любому землетрясенію. Полагая даже, что отношеніе ихъ можетъ быть выражено достаточно точно уравненіемъ (198), все-же мы должны опредѣлять предварительно, до примѣненія уравненія (201), абсолютныя значенія v_1 или v_2 по изложенному выше методу. Нельзя, слѣдовательно, обходиться безъ рѣшенія системы уравненій (190) или (193). Для оцѣнки точности, достижимой при помощи уравненія (201), продифференцируемъ это уравненіе, предполагая для упрощенія, что σ отъ h не зависитъ. Получимъ:

$$\delta h = \left(\frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2}\right)^2 \cdot \frac{p_2 - p_1}{h}\,\delta(p_2 - p_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (202)$$

На основаніи выраженій (73) и (197) найдемъ, что множитель $\left(\frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2}\right)$ приблизительно равняется 9 км. въ 1 сек. Для разности $p_2 - p_1 = 60^c$, соотвѣтствующей эпицентральному разстоянію $\Delta = 600$ км., и при глубинѣ $h = 100$ км., ошибка на 1^c разности $p_2 - p_1$ соотвѣтствуетъ ошибкѣ на 50 км. глубины. А только начиная съ этого разстоянія вторая фаза обыкновенно выступаетъ достаточно отчетливо на сейсмограммахъ. Примѣненіе уравненія (201) къ задачѣ опредѣленія глубины очага, слѣдовательно, въ настоящее время не обѣщаетъ надежныхъ результатовъ.

§ 68. Въ заключеніе этой главы нужно обратить вниманіе еще на одну поправку, которая можетъ иногда имѣть нѣкоторое значеніе. Во всѣхъ предыдущихъ разсужденіяхъ предполагалось, что поверхность земли представляетъ поверхность шара, другими словами, наблюденія отнесены къ уровню моря. Глубина очага получается, слѣдовательно, считая отъ уровня моря. Требуется привести также наблюденія на сейсмическихъ станціяхъ къ уровню моря. Необходимыя поправки легко находятся помощью прилагаемаго чертежа 7, въ которомъ AB представляетъ уровень моря, S — станцію, высота которой равняется q, а SS' — часть сейсмическаго луча, которую въ данномъ случаѣ съ вполнѣ достаточной точностью можно принять за прямую. Необходимыя поправки для всѣхъ элементовъ, приводимыхъ къ точкѣ S' получаются изъ треугольника SQS' помощью истиннаго угла выхода ε, опредѣляемаго изъ уравненія (122), въ которомъ постоян-

Черт. 7.



ныя опредѣляются изъ предварительныхъ вычисленій по неприведеннымъ наблюденіямъ. Для поправки времени $\delta\tau$ получится напр.:

$$\delta\tau = \frac{q}{v_0 \sin\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (203)$$

Такъ какъ высоты сейсмическихъ станцій вообще незначительны, то эти поправки обыкновенно не имѣютъ значенія за исключеніемъ случаевъ, въ которыхъ уголъ ε очень малъ. Такіе случаи могутъ иногда представляться какъ разъ на близкихъ разстояніяхъ отъ эпицентра. Положимъ для сокращенія:

$$\beta = \frac{a+b}{a-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (204)$$

и принимаемъ $R = 1$. Тогда получимъ изъ уравненія (122) слѣдующее:

$$\frac{d\varepsilon}{d0} = \frac{\beta - (h+\beta)\cos 0}{\sin^2 0 + \left[h + 2\beta \sin^2 \frac{0}{2}\right]^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (205)$$

Знаменатель этого выраженія всегда > 0, числитель-же можетъ пріобрѣсти значеніе нуль. Въ этомъ случаѣ наступаетъ минимумъ угла выхода ε_m на разстояніи θ_m отъ эпицентра. Имѣемъ

$$\cos\theta_m = \frac{\beta}{h+\beta}; \quad \sin\theta_m = \frac{\sqrt{h^2+2\beta h}}{h+\beta}; \quad \operatorname{tang}\theta_m = \frac{\sqrt{h^2+2\beta h}}{\beta}; \ldots (206)$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon_m = \sqrt{h^2+2\beta h}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (207)$$

такъ что:

$$\operatorname{tang}\theta_m = \frac{1}{\beta}\operatorname{tang}\varepsilon_m = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\varepsilon_m \quad \ldots\ldots\ldots (208)$$

По числамъ (73) имѣемъ приблизительно $\beta = 5$, такъ что, пренебрегая h^2 противъ $2\beta h$, имѣемъ: $\operatorname{tang}\varepsilon_m = 3.16\sqrt{h}$ и приближенно $\theta_m = 0.6\sqrt{h}$. Для глубины очага $h = 0.005$ или 32 км., минимумъ угла ε_m составляетъ $12^\circ.6$ и наступаетъ на эпицентральномъ разстояніи $\Delta = 280$ км. Для станціи, расположенной на высотѣ 2000 м., поправка (203) составляла-бы около $1\frac{1}{2}$ сек.

Глава V.

Примѣры.

§ 69. Настоящая работа преслѣдуетъ исключительно теоретическую цѣль. Поэтому можно ограничиться лишь немногими примѣрами, иллюстрирующими примѣненіе формулъ предыдущихъ главъ. Къ сожалѣнію эта возможность является одновременно и необходимостью. Литература крайне бѣдна монографіями, представляющими тщательную обработку такихъ землетрясеній, для которыхъ имѣются достаточныя данныя, позволяющія опредѣленіе глубины очага. Подходящіе случаи я нашелъ только въ итальянской литературѣ.

Начинаю съ землетрясенія, происшедшаго 10 апрѣля 1911 г. въ окрестностяхъ Рима. По поводу этого землетрясенія G. Agamennone опубликовалъ двѣ замѣтки[1]) и кромѣ того любезно сообщилъ мнѣ нѣкоторыя рукописныя свѣдѣнія. Положеніе эпицентра G. Agamennone опредѣляетъ, пренебрегая глубиной очага, главнымъ образомъ по моментамъ наступленія въ Римѣ и Роккѣ ди Папа, съ нѣкоторымъ произволомъ. Онъ находитъ: $\varphi = 41^\circ 47'.5$; $\lambda = 12^\circ 40'$. По рукописнымъ свѣдѣніямъ въ Римѣ первое отклоненіе маятниковъ составило $0^{mm}.5$ на *NW* и $0^{mm}.2$ на *SW*. Оба маятника имѣли почти одинаковый собственный періодъ ($8^s.7$ и $8^s.1$) и одинаковое увеличеніе, но не были снабжены искусственнымъ затуханіемъ. Періодъ первыхъ колебаній почвы равнялся $0^s.1$. Можно поэтому предполагать, что движеніе подходило по направленію съ $SE76^\circ$. Въ Роккѣ ди Папа составляющія *N* и *E* сейсмографа Brassart'a, обладавшія одинаковымъ періодомъ $4^s.2$ безъ затуханія и одинаковымъ увеличеніемъ, записали среднія ординаты въ началѣ движенія $0^m.5$ и $0^m.5$, такъ что соотвѣтствующій

---

[1]) G. Agamennone. Il Terremoto Laziale del 10 Aprile 1911. Rendic. Accad. dei Lincei (5) XX, 2 sem., fasc. 1, стр. 12—18, 1911.

Его-же. Sulla velocitá di propagazione del Terremoto Laziale del 10 Aprile 1912. Rendic. Accad. dei Lincei. (5) XXI, 1 sem., fasc. 3, стр. 201—207, 1912.

азимутъ можетъ быть принимаемъ $= NE\,45°$. По этимъ даннымъ опредѣляются слѣдующія координаты эпицентра:

$$\varphi = 41°\,50'; \qquad \lambda = 12°\,49'.$$

Принятые здѣсь азимуты, конечно, не особенно точны. Все-же, вслѣдствіе близости станцій, эпицентръ, опредѣленный на этомъ основаніи, представляется довольно надежнымъ; макросейсмическія наблюденія, отличаются большей неопредѣленностью. Не настаивая особенно въ *данномъ* случаѣ на большей или меньшей точности того или другого положенія эпицентра, мы все-же, въ силу изложенныхъ въ § 3 обстоятельствъ, принципіально должны отдать предпочтеніе эпицентру, опредѣленному по азимутамъ.

§ 70. На основаніи принятаго нами положенія эпицентра опредѣляются эпицентральныя разстоянія тѣхъ сейсмическихъ станцій, наблюденія которыхъ служатъ основаніемъ дальнѣйшихъ вычисленій, въ слѣдующемъ видѣ:

	Рокка ди Папа	Римъ	Искіа	Загребъ
θ	$0°\,7'$	$0°\,17'$	$1°\,22'$	$4°\,35'$
Δ	13 км.	31 км.	151 км.	509 км.
Начало движ.	$10^{ч}\,43^{м}\,39^{с}$	$10^{ч}\,43^{м}\,41^{с}$	$10^{ч}\,43^{м}\,59^{с}$	$10^{ч}\,45^{м}\,0^{с}$

Въ Роккѣ ди Папа была записана и вертикальная составляющая движенія почвы. Смѣщеніе по прибору, собственный періодъ котораго равнялся $2^{с}.0$, составляло $2^{м}.0$. Періоды T первыхъ колебаній почвы были $0^{с}.2$ по горизонтальнымъ составляющимъ и $0^{с}.33$ по вертикальной. Абсолютное увеличеніе I_0 — для безконечно-быстрыхъ колебаній — было 10 у всѣхъ трехъ составляющихъ. Истинное увеличеніе I вычислено мною по формулѣ:

$$I = I_0 : \left\{1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right\},$$

гдѣ T_0 — собственный періодъ маятника. По приведеннымъ даннымъ опредѣляется видимый уголъ выхода:

$$\bar{\varepsilon} = 74°.2.$$

Для опредѣленія истиннаго угла выхода ε по формулѣ (188) нужно знать отношеніе скоростей, которое по Wiechert'у опредѣляется выра-

женіемъ (198). Для нашего землетрясенія это отношеніе, на основаніи моментовъ наступленія, приблизительно равняется 0.65. Этой величинѣ соотвѣтствуетъ $\varepsilon = 77^\circ.5$, между тѣмъ какъ помощью (198) получается $\varepsilon = 75^\circ.7$. Приступая теперь къ вычисленію глубины помощью (122), нужно замѣтить, что второй членъ лѣвой стороны этого уравненія почти никакого значенія не имѣетъ. Принимая для выраженія $\beta = \frac{a+b}{a-b}$ значеніе Wiechert'a, т.-е. 5, мы видимъ, что этотъ второй членъ составляетъ всего $^1/_{10}\,^0/_0$, такъ что имъ можно пренебречь. Мы получимъ слѣдовательно помощью угла $77^\circ.5$ глубину:

$$h = 59 \text{ км.}$$

между тѣмъ какъ углу $75^\circ.7$ соотвѣтствуетъ глубина $h = 51$ км.

Точность полученнаго результата трудно поддается оцѣнкѣ. Уголъ ε свободно можетъ быть ошибочнымъ на $5^\circ - 10^\circ$. Кромѣ того опредѣляемая этимъ путемъ глубина зависитъ въ значительной степени отъ принятаго эпицентральнаго разстоянія. Принимая напр. эпицентръ по опредѣленію Agamennone, мы имѣли бы для Рокки ди Папа эпицентральное разстояніе $\Delta = 6$ км., а этому соотвѣтствовали бы глубины 27 км. или 23 км. Такъ какъ не имѣется другихъ станцій, записавшихъ вертикальную составляющую движенія почвы, то и нѣтъ возможности, поконтролировать полученный результатъ.

§ 71. Обращаемся теперь къ вышеприведеннымъ моментамъ наступленія. Скорость распространенія приблизительно равняется 6 км. въ 1^s. По станціи Рокка ди Папа получаемъ, слѣдовательно, моментъ наступленія сотрясенія въ эпицентрѣ для случая $h = 0 : 10^u\,43^m\,37^s$. Составимъ промежутки τ_0 на основаніи этой гипотезы и вычислимъ неизвѣстныя ξ и η — формулы (194) и (195) — помощью уравненій (193). Замѣтимъ, что высшіе члены разложенія (173) имѣютъ замѣтное вліяніе только на показанія станціи Загребъ, для которой поправка за кривизну составляетъ $-0^s.7$. Принимая $V = 0.00095$, т.-е. прибл. 6 км., найдемъ:

$$\xi = -1^s.3 \pm 1^s.0; \qquad \eta = -0.00256 \pm 0.02400$$

Наблюденія помощью этихъ величинъ представляются въ слѣдующемъ видѣ:

	Рокка ди Папа	Римъ	Искіа	Загребъ
Ошибка (набл. — выч.)	$+1^s.2$	$+0^s.1$	$-1^s.8$	$+0^s.5$.

Ошибки не особенно велики и въ крайнемъ случаѣ можно было бы удовлетворяться этимъ представленіемъ наблюденій. Все-же мало вѣроятно,

чтобы ближайшая къ эпицентру станція опоздала больше всѣхъ. Къ тому для ξ получилась отрицательная величина. Предполагая, что δx вѣроятно положительная величина, имѣемъ:

$$\delta h = V(\delta x + 1.3).$$

Полагая $\delta x = 0$, получимъ $\delta h = 8$ км. Въ этомъ случаѣ δx должно быть 0°.8, но тогда и δh увеличится. Повторяя эти разсужденія, мы найдемъ для δh величину 15 км., съ которой можно приступить къ рѣшенію уравненій типа (190), не принимая во вниманіе члена $\delta(ab)$, котораго изъ имѣющихся наблюденій нельзя опредѣлить. Въ результатѣ получится настолько большая величина δh, что повтореніе вычисленія съ новымъ значеніемъ h необходимо. Конечный результатъ вычисленій слѣдующій:

$$h = 0.006342 \pm 0.000600; \quad V = 0.0009007 \pm 0.0000089$$

или въ километрахъ:

$$h = 40.4 \text{ км.} \pm 4.8; \quad V = 5.737 \text{ км.} \pm 0.057.$$

Этому соотвѣтствуетъ моментъ наступленія въ эпицентрѣ: $10^{\text{ч}}\,43^{\text{м}}\,38^{\text{с}}.9$, а наблюденія представляются такъ:

	Рокка ди Папа	Римъ	Искіа	Загребъ
Набл. — вычисл.:	— 0°.2	+ 0°.2	— 0°.1	+ 0°.1.

Поправка за кривизну луча въ этомъ случаѣ составляетъ — 0°.9 для станціи Загребъ.

Удивительно хорошее согласіе отчасти дѣло случая, такъ какъ наблюденные моменты выражены въ цѣлыхъ секундахъ и слѣдовательно вообще ошибочны до 0°.5.

§ 72. Полученная глубина имѣетъ реальное значеніе. Это слѣдуетъ и изъ того факта, что она сравнительно мало зависитъ отъ принятаго положенія эпицентра. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ эпицентръ по Agamennone и повторимъ вычисленіе съ разстояніями, соотвѣтствующими этому положенію. Найдемъ:

$$h = 64.2 \text{ км.} \pm 16.8; \quad V = 5.50 \text{ км.} \pm 0.22.$$

Наблюденія-же представляются слѣдующимъ образомъ:

	Рокка ди Папа	Римъ	Искіа	Загребъ
Набл. — вычисл.	— 0°.8	+ 0°.7	— 0°.4	+ 0°.5.

Глубины, полученныя для двухъ различныхъ положеній эпицентра, близко сходятся въ предѣлахъ среднихъ ошибокъ, а это подтверждаетъ реальность полученнаго результата. Замѣтимъ еще, что глубины, полученныя для эпицентра, опредѣленнаго нами по азимутамъ, какъ по углу выхода такъ и по моментамъ наступленія сотрясенія, ближе сходятся между собою, чѣмъ соотвѣтствующія глубины, полученныя для эпицентра Agamennone. Можетъ быть, это — не вполнѣ случайное обстоятельство.

На основаніи приведенныхъ вычисленій можно съ увѣренностью сказать, что очагъ землетрясенія отъ 10-го апрѣля 1911 г. находился на глубинѣ 40—50 км.

§ 73. Относительно моментовъ наступленія второй фазы замѣтимъ слѣдующее. Помощью найденной уже глубины и момента землетрясенія въ гипоцентрѣ можно вычислить вѣроятную скорость распространенія поперечныхъ волнъ. На основаніи такого вычисленія находимъ для вышеприведенныхъ четырехъ станцій ошибки, колеблющіяся въ предѣлахъ 1^c — 3^c, между тѣмъ какъ наблюденія добавочныхъ трехъ станцій — Сіена, Капанноли и Тріестъ, — для которыхъ Agamennone приводитъ моменты начала второй фазы, ошибочны на 15 сек. Эти послѣднія наблюденія, очевидно, не годятся и должны быть отброшены. Остаются, слѣдовательно, только прежнія 4 станціи и поэтому наблюденія второй фазы не могутъ улучшить полученную по первой фазѣ глубину. Средняя скорость второй фазы получается = 3.74 км.

На основаніи сказаннаго нельзя и ожидать какой-либо пользы отъ примѣненія формулы (201). Въ самомъ дѣлѣ, по этой формулѣ получаются мнимыя глубины для станцій Рокка ди Папа и Искіа, между тѣмъ какъ для станцій Римъ и Загребъ получаются глубины 8 км. и 105 км.

Приведенный нами примѣръ относится къ не сильному землетрясенію, обнимавшему сравнительно небольшую площадь. Очагъ его оказался на глубинѣ около 40 км., при чемъ средняя ошибка этой глубины во много разъ меньше абсолютной величины глубины. Нельзя не подчеркнуть этотъ результатъ. Подъ вліяніемъ вычисленныхъ по способу Kövesligethy незначительныхъ глубинъ для нѣкоторыхъ венгерскихъ землетрясеній, а можетъ быть и на основаніи способа Рудкаго, повидимому, стало распространяться мнѣніе, что глубины землетрясеній вообще измѣряются немногими километрами. По поводу нашего случая, напр., Agamennone высказываетъ мнѣніе, что глубина 6 км. «costituisce già un' esagerazione». Мы видимъ, однако, что это предположеніе не подтверждается строгимъ вычисленіемъ.

§ 74. Разсмотримъ теперь землетрясеніе въ Калабріи отъ 8 сент. 1905 г., подвергавшееся разносторонней обработкѣ со стороны разныхъ изслѣдователей. Наблюденія этого землетрясенія служили Wiechert'у и его ученикамъ основнымъ матеріаломъ для ихъ числовыхъ выкладокъ. Приведенныя нами числа — формулы (73), (191) и (197) — относятся именно къ этому землетрясенію, по крайней мѣрѣ для небольшихъ эпицентральныхъ разстояній примѣрно до 1000 или 2000 км. Глубиною очага его при этомъ пренебрегали. А между тѣмъ мы видѣли (см. § 25), что Rizzo на основаніи своей кривой опредѣлилъ глубину $h = 50$ км., между тѣмъ какъ Руцкій по той-же кривой нашелъ $h = 7$ км., при чемъ оба изслѣдователя пренебрегали кривизной сейсмическаго луча. Принимая-же во вниманіе это обстоятельство, мы нашли бы на основаніи тѣхъ-же данныхъ глубины 250 км. и 130 км. Нѣкоторое видоизмѣненіе кривой привело бы къ эпицентральнымъ разстояніямъ 1600 км. и 300 км. для точекъ U_0 и u_0, а соотвѣтствующія глубины были бы 140 км. и 40 км.

Объясненіе этихъ разногласій состоитъ въ томъ, что кривая Rizzo въ начальной своей части произвольна вслѣдствіе произвольнаго-же опредѣленія момента наступленія сотрясенія въ эпицентрѣ. Это опредѣленіе встрѣтило основательную критику со стороны Zöppritz'а[1]), такъ что мы можемъ ограничиться ссылкой на эти замѣтки. Мы займемся здѣсь спорнымъ вопросомъ о глубинѣ очага этого землетрясенія на основаніи нашихъ формулъ.

§ 75. Ближайшая къ эпицентру станція — Мессина. Эпицентръ опредѣленъ по макросейсмическимъ даннымъ весьма точно; разстояніе отъ него станціи Мессина — 84 км. Начало записи въ Мессинѣ было въ $1^h 43^m 17^s$. Полагая $h = 0$, мы получимъ моментъ землетрясенія въ эпицентрѣ $= 1^h 43^m 5^s$. Примѣняемъ формулу (193) къ первымъ станціямъ: Мессина, Катанія, Искіа, Рокка ди Папа и $\frac{1}{2}$ (Ximeniano + Quarto Castello). Вычисленіе даетъ слѣдующій результатъ:

$$\xi = +4^s.0 \pm 2^s.6; \qquad \eta = 0.12 \pm 0.05.$$

Отсюда слѣдуетъ, что δx должно равняться -4^s, другими словами необходимо, чтобы начало въ Мессинѣ было отмѣчено на 4^s слишкомъ рано; только въ этомъ случаѣ можно ожидать реальный результатъ для искомой глубины. Такимъ образомъ мало вѣроятно, чтобы по имѣющимся наблюденіямъ могла быть опредѣлена какая-либо достовѣрная величина глубины очага.

---

[1]) E. Wiechert und K. Zöppritz. Über Erdbebenwellen. I u. II. Nachr. K. Ges. d. Wissen. zu Göttingen. 1907, стр. 127.

Подобный же результатъ получается и помощью формулы (190). Принимаемъ для глубины какую-нибудь исходную величину, напр. 0.005 R или 32 км., и вычисляемъ δh по приведеннымъ уже станціямъ. Получаемъ $h = -159$ км. ± 164 км.

Изъ всего приведеннаго слѣдуетъ, что глубина очага землетрясенія отъ 8-го сент. 1905 г. настолько мала, что она не можетъ быть обнаружена на основаніи имѣющихся наблюденій, обладающихъ недостаточной точностью.

§ 76. Болѣе подходящій примѣръ представляетъ другое сильное землетрясеніе, происшедшее въ Калабріи 23 окт. 1907 г., для котораго Rizzo также опубликовалъ тщательное сопоставленіе имѣющихся наблюденій[1]). Эпицентръ этого землетрясенія находился около г. Феруцано; изосейсты высшихъ балловъ представлялись въ видѣ правильныхъ концентрическихъ окружно- стей, такъ что по мнѣнію Mercalli[2]) положеніе эпицентра извѣстно съ точностью до 1—2 км.

Къ работѣ Rizzo приложена кривая пробѣга, обладающая точкой перегиба (u_0) приблизительно на разстояніи 700 км. отъ эпицентра; точка Руцкаго (U_0) находится на разстояніи 1300 км. На основаніи данныхъ, сообщенныхъ въ прежнихъ главахъ, получаемъ глубины, въ зависимости отъ положенія этихъ точекъ, соотвѣтственно равныя 190 км. и 90 км. Эти числа не имѣютъ, однако, реальнаго значенія. Кривая Rizzo проведена въ промежуткѣ между эпицентральными разстояніями отъ 200 км. до 700 км. на основаніи данныхъ трехъ станцій — Валетта, Рокка ди Папа и Карлофорте, — которыя всѣ довольно сомнительны. Въ Валеттѣ находился маятникъ Мильна, по которому опредѣленіе времени возможно только съ точностью до $0^m.1 - 0^m.2$. Въ Роккѣ ди Папа, вслѣдствіе какихъ-то мѣстныхъ возмущеній, наблюдались «un principio incerto» въ $20^h 28^m 25^s$ и «un principio sicuro» въ $20^h 29^m 19^s$, по которому Rizzo выводитъ «вѣроятное» начало $20^h 29^m 0^s$. Въ Карлофорте начало записи также не было «ben chiaro». Ясно, что на основаніи подобныхъ сомнительныхъ данныхъ нельзя сдѣлать точныхъ выводовъ.

§ 77. Подвергая наблюденія обработкѣ по способу наименьшихъ квадратовъ, можно надлежащимъ распредѣленіемъ вѣсовъ учесть вліяніе большей или меньшей надежности наблюденій.

---

1) G. B. Rizzo. Nuovo contributo allo studio della propagazione dei movimenti sismici. Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino. (II), т. LIX, 1907—1908, стр. 375—419.

2) G. Mercalli. Sul terremoto calabrese del 23 ottobre 1907. Boll. della Soc. Sismol. Ital. XIII. № 1, стр. 9—15, 1908—1909.

Но при этомъ необходимо руководствоваться какимъ-нибудь объективнымъ правиломъ; въ противномъ случаѣ могутъ получаться вполнѣ произвольные результаты. За неимѣніемъ такого правила, по моему мнѣнію, нужно безусловно исключить всѣ наблюденія, которыя, подобно вышеприведеннымъ, являются почему-либо сомнительными. Далѣе нужно имѣть въ виду, что на близкомъ разстояніи отъ эпицентра, движеніе почвы сравнительно велико и отчетливо отмѣчается даже мало-чувствительными маятниками. Кромѣ того, кривая пробѣга тамъ отличается болѣе значительной кривизной и сравнительно быстрымъ измѣненіемъ ея. На этихъ разстояніяхъ каждое достовѣрное наблюденіе имѣетъ большое значеніе для опредѣленія глубины очага. На большихъ же разстояніяхъ отъ эпицентра начало первой фазы опредѣляется менѣе точно, даже при помощи весьма чувствительныхъ приборовъ, между тѣмъ какъ кривая пробѣга сравнительно слабо искривлена. Поэтому цѣлесообразно, соединять показанія нѣсколькихъ близлежащихъ станцій въ одно среднее, и придавать одинаковый вѣсъ группамъ станцій на большихъ разстояніяхъ отъ эпицентра и отдѣльнымъ станціямъ, близкимъ къ нему.

§ 78. Руководствуясь изложенными соображеніями, я для землетрясенія отъ 23 октября 1907 г. составилъ 9 уравненій, приведенныхъ въ нижепомѣщенной табличкѣ, при чемъ я ограничился эпицентральнымъ разстояніемъ въ 15°, такъ какъ за этимъ предѣломъ встрѣчается значительный пробѣлъ въ распредѣленіи станцій, наблюденія становятся малочисленными, а формулы къ значительнымъ эпицентральнымъ разстояніямъ не приложимы.

Путемъ, указаннымъ для предыдущихъ примѣровъ, можно сначала помощью уравненій (193) и (196) убѣдиться въ томъ, что для этого землетрясенія вѣроятно получится замѣтная глубина очага. Дальнѣйшее вычисленіе производится на основаніи уравненій (189) и (190) при помощи произвольно принятыхъ исходныхъ величинъ V, ab, h. Образуемъ среднее изъ всѣхъ уравненій и вычитаемъ это среднее изъ каждаго уравненія въ отдѣльности. Тогда постоянный членъ исключается, такъ что первоначально принятое время наступленія землетрясенія въ эпицентрѣ не имѣетъ значенія. Въ нижепомѣщенной таблицѣ это время принято согласно предположенію Rizzo, т.-е. $20^{\text{ч}}\,28^{\text{м}}\,19^{\text{с}}$. Исходныя величины неизвѣстныхъ были слѣдующія:

$$[R=1] \quad h=0.01000; \quad V=0.00120; \quad ab=7.03\times 10^{-6};$$

или въ километрахъ:

$$h=63.7 \text{ км.}, \quad V=7.644 \text{ км.}$$

Станціи.	По даннымъ Rizzo.		По даннымъ вычисленія.				
				Отступленія отъ средняго.			
	Θ	τ_0	τ_c	$\tau_0 - \tau_c$	Коэфф. $\frac{\delta V}{V} \times 10^{-2}$	Коэфф. $\delta(ab) \times 10^{-6}$	Коэфф. $\delta h \times 10^{-2}$
		s	s	s			
1. Мессина	0° 27′	2	2.3	— 0.2	+ 1.031	+ 0.4486	+ 5.560
2. Катанія	0 57.5	5	7.9	— 2.8	+ 0.975	+ 0.4481	+ 3.245
3. Пола	7 2	95	92.8	+ 2.3	+ 0.156	+ 0.2834	— 0.821
4. Загребъ, Тріестъ, Падуа, Лайбахъ . . .	7 55.5	109	105.2	+ 3.9	+ 0.038	+ 0.2172	— 0.957
5. Монкаліери, Грацъ, О'Дьялла . .	9 41	130	129.3	+ 0.8	— 0.178	+ 0.0466	— 1.160
6. Вѣна, Мюнхенъ	10 25	138	139.3	— 1.2	— 0.265	— 0.0403	— 1.260
7. Гогенгеймъ, Гейдельбергъ	12 9.5	164	162.4	+ 1.7	— 0.461	— 0.2797	— 1.429
8. Іена, Лейпцигъ	13 30.5	177	180.1	— 3.0	— 0.607	— 0.4927	— 1.544
9. Гёттингенъ, Потсдамъ	14 20.5	188.5	189.9	— 1.3	— 0.693	— 0.6312	— 1.610

§ 79. Изъ составляемыхъ по даннымъ этой таблицы уравненій можно опредѣлить одновременно всѣ три неизвѣстныхъ. Результатъ будетъ слѣдующій:

$$V = 0.00105; \quad ab = 22.4 \times 10^{-6}; \quad h = 0.0195.$$

$$\pm 0.00011; \qquad \pm 8.2 \times 10^{-6}; \qquad \pm 0.0134.$$

Какъ видно, числа получились не особенно надежныя. Это зависитъ отъ того, что δh надежно опредѣляется только изъ первыхъ уравненій, между тѣмъ какъ небольшія ошибки послѣднихъ уравненій, распредѣляемыя равномѣрно на всѣ неизвѣстныя, компенсируются только большими измѣненіями δh. Гораздо выгоднѣе, опредѣлить изъ совокупности всѣхъ уравненій только δV и $\delta(ab)$, а затѣмъ помощью найденныхъ такимъ образомъ величинъ V а ab перевычислить первыя уравненія, по которымъ наконецъ опредѣлится δh. До нахожденія δV и $\delta(ab)$ глубина h должна быть извѣстна достаточно точно; въ противномъ случаѣ необходимо повторить вычисленія.

Въ данномъ случаѣ получимъ изъ совокупности всѣхъ уравненій,

пренебрегая δh, слѣдующія величины:

$$V = 0.001128; \quad ab = 17.4 \times 10^{-6},$$
$$\pm 0.000030; \qquad \pm 4.0 \times 10^{-6}.$$

Результатъ этотъ сходится, конечно, съ вышеприведеннымъ въ предѣлахъ среднихъ ошибокъ, но эти послѣднія значительно меньше. Съ найденными величинами V и ab перевычислимъ первыя 4 уравненія, изъ которыхъ опредѣлимъ только δh. Найдемъ:

$$\left.\begin{matrix} h = 0.00866 \\ \pm 0.00300 \end{matrix}\right\}; \quad \text{въ километрахъ } h = 55.2 \pm 19.1.$$

Это рѣшеніе на столько близко къ принятой исходной величинѣ h, что повтореніе вычисленія не требуется. По первымъ тремъ наблюденіямъ получилась бы нѣсколько большая величина h, но и большая средняя ошибка. Вышеприведенная средняя ошибка — ± 20 км. — къ сожалѣнію еще довольно велика. Она объясняется тѣмъ, что на небольшомъ разстояніи отъ эпицентра оказались только двѣ надежныя станціи, между тѣмъ какъ пришлось исключить немалое число сомнительныхъ данныхъ. Весьма желательно, чтобы въ будущемъ и на маленькихъ станціяхъ второго разряда, расположенныхъ въ сейсмическихъ мѣстностяхъ, обращалось больше вниманія на добываніе достовѣрныхъ данныхъ; сомнительныя наблюденія могутъ скорѣе принести вредъ чѣмъ пользу.

По найденнымъ величинамъ V, ab и h можно при помощи уравненія (175) вычислить постоянныя a и b въ отдѣльности. Въ нашемъ случаѣ получится:

$$a = 0.004755; \qquad b = 0.003659.$$

Эти величины значительно расходятся съ числами (73). На сколько это разногласіе можетъ быть объяснено только ошибками наблюденій или же какими-нибудь иными факторами, это — пока вопросъ открытый.

§ 80. Посвящаемъ еще нѣсколько словъ большому землетрясенію въ Мессинѣ отъ 28-го декабря 1908 г., для котораго Rizzo[1]) опубликовалъ сопоставленіе наблюденій, подобное прежнимъ уже приведеннымъ работамъ.

---

[1]) G. B. Rizzo. Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina del 28 dicembre, 1908. Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino. (II) LXI, стр. 355—417, 1910.

По способу Kövesligethy Oddone[1]) вычислилъ глубину очага этого землетрясенія и нашелъ число 9 км. Точность этой величины не поддается оцѣнкѣ. Обращаемся поэтому къ кривой пробѣга. Время наступленія землетрясенія въ эпицентрѣ въ этомъ случаѣ извѣстно очень точно, такъ какъ Мессина по даннымъ Rizzo находилась на эпицентральнонъ разстояніи всего 4.6 км. Принимая во вниманіе это обстоятельство, можно по моментамъ наступленія на другихъ ближайшихъ станціяхъ и на основаніи кривой пробѣга удостовѣриться, что глубина очага была ничтожна. Такой-же результатъ получается и при помощи уравненій (193) и (196). Поэтому болѣе точное вычисленіе можетъ возбудить нѣкоторый интересъ только въ томъ отношеніи, что средняя ошибка искомой глубины даетъ понятіе о достижимой въ подобныхъ случаяхъ точности.

Въ данномъ случаѣ можно напр. составить 6 уравненій на основаніи станцій Мессина, Катаніа, Искіа, Рокка ди Папа, Сараево и $^1/_2$ (Пола — Фіуме). Исходными величинами могутъ служить:

$$h = 0.005; \qquad V = 0.0012; \qquad ab = 7 \times 10^{-6}.$$

Помощью этихъ данныхъ получится для глубины очага число:

$$h = 5 \text{ км.} \pm 24 \text{ км.}$$

Другія комбинаціи станцій и исходныхъ величинъ приводятъ, конечно, къ другимъ числамъ для глубины; средняя ошибка получается, однако, всегда около 25 км.

§ 81. Приведенные примѣры достаточно освѣщаютъ выведенныя въ настоящей работѣ уравненія и достижимую въ настоящее время точность при опредѣленіи глубины очага землетрясенія. Заключенія, которыя можно вывести на основаніи приведенныхъ вычисленій, слѣдующія.

Наиболѣе точныя данныя, которыми располагаетъ современный сейсмологъ, т.-е. моменты наступленія сотрясенія, или, короче говоря, кривая пробѣга, могутъ обнаружить глубину очага только въ тѣхъ случаяхъ, *когда она превышаетъ 10—20 км.* Это — предѣлъ точности, достижимой въ настоящее время. Значительное увеличеніе точности можно ожидать только въ томъ случаѣ, если бы на сейсмическихъ станціяхъ время опредѣлялось

---

[1]) Emilio Oddone. Calcolo provvisorio della profondità dell' ipocentro del terremoto Calabro-Siculo del 28 dicembre 1908. Rend. R. Accad. dei Lincei. (5). XVIII, I sem., 1909, fasc. 4, стр. 186—192.

съ точностью до 0°1. Хотя это и вполнѣ возможно при нынѣшнемъ состояніи наблюдательной техники, все-же мало надежды, чтобы это пожеланіе исполнялось въ ближайшемъ будущемъ.

Болѣе надежды можно возлагать на опредѣленіе угла выхода. Въ настоящее время, правда, можно скорѣе предполагать, чѣмъ утверждать съ увѣренностью, что при помощи этого элемента возможна будетъ большая точность, чѣмъ при помощи остальныхъ элементовъ. Требуется еще исполненіе огромной работы, чтобы довести этотъ методъ до желаемаго совершенства. Возможность достиженія этой цѣли, однако, на основаніи выше изложеннаго, едва-ли подлежитъ сомнѣнію.

Всетаки и при настоящемъ положеніи дѣла опредѣленіе глубинъ гипоцентровъ представляетъ благодарную задачу. Существуютъ, повидимому, землетрясенія, очагъ которыхъ находится на глубинѣ нѣсколькихъ десятковъ километровъ. Такіе факты могутъ быть обнаружены и современными средствами. Въ другихъ случаяхъ, когда для глубины очага нельзя опредѣлить какую-либо точную величину, можно по крайней мѣрѣ вывести заключеніе, что очагъ находится на сравнительно близкомъ разстояніи отъ земной поверхности. Землетрясенія въ этомъ отношеніи представляютъ, повидимому, большое разнообразіе и весьма желательно, чтобы опредѣленія, подобныя вышеприведеннымъ, имѣлись въ большемъ количествѣ.

Центральные институты, занимающіеся собираніемъ и обработкой сейсмическихъ наблюденій, располагаютъ большимъ матеріаломъ и имѣютъ возможность критической оцѣнки его. Они могли бы, помощью изложенной здѣсь теоріи, со временемъ накоплять весьма цѣнныя данныя.

Глава VI.

Распредѣленіе скоростей внутри земли.

§ 82. Разсужденія предыдущихъ главъ основываются на гипотезѣ, выраженной уравненіемъ (48), справедливость которой была обнаружена работами Wiechert'a и его учениковъ. Изслѣдованія эти производились при помощи графическихъ и интерполяціонныхъ методовъ, такъ что прямая повѣрка ихъ затруднительна. Вещественнымъ доказательствомъ выводовъ Wiechert'a является только опубликованная имъ кривая пробѣга. На этомъ основаніи Wiechert пришелъ къ заключенію, что законъ (48) дѣйствителенъ только до глубины $h = \frac{1}{5} R$, затѣмъ скорость распространенія сейсмическихъ волнъ измѣняется скачкомъ и далѣе она слѣдуетъ уже совсѣмъ другому закону. Кривая пробѣга пролегаетъ, однако, вполнѣ плавно и найденный Wiechert'омъ скачекъ на ней непосредственно не обнаруживается.

Не умаляя нисколько высокое значеніе работъ Wiechert'a и признавая дѣйствительность найденныхъ имъ результатовъ, можно всетаки считать желательнымъ болѣе прямое доказательство этихъ фактовъ, позволяющее удобно провѣрять его выводы. Въ главѣ III было указано, что такая повѣрка можетъ быть очень просто получена помощью формулъ (136) до (147). На основаніи этихъ формулъ мы докажемъ здѣсь на примѣрѣ справедливость выводовъ Wiechert'a и такимъ образомъ оправдаемъ наши предположенія независимо отъ основныхъ его работъ.

§ 83. Наиболѣе удобнымъ примѣромъ является приведенное уже въ предыдущей главѣ большое землетрясеніе отъ 28 декабря 1908 г. Положеніе эпицентра его и время начала сотрясенія въ эпицентрѣ извѣстны достаточно точно, а глубина очага оказалась настолько ничтожной, что она не вліяетъ замѣтнымъ образомъ на кривую пробѣга. Впрочемъ, въ случаѣ замѣтной глубины было бы нетрудно исправлять наблюденія такъ, чтобы онѣ отно-

сились къ глубинѣ $h = 0$. Для этого приведенія можетъ служить уравненіе (105) въ связи съ соотвѣтствующими величинами для t_0 и t_i. Сущность приведенія настолько проста, что мы можемъ не останавливаться на этомъ вопросѣ.

Мы видѣли, что для землетрясенія въ Мессинѣ можно пренебречь этимъ приведеніемъ и что ст. Мессина находилась настолько близко къ эпицентру, что поправкой δx въ формулѣ (143) можно также пренебречь. Такимъ образомъ число станцій, а также число неизвѣстныхъ уменьшаются на 1. Остальной огромный матеріалъ наблюденій нужно также нѣсколько уменьшить. Всѣ сомнительныя или менѣе точныя наблюденія, въ томъ числѣ и японскія, плохо согласующіяся между собою и съ сосѣдними станціями, нужно выкинуть, а другія станціи можно соединить по группамъ, соотвѣтственно эпицентральнымъ разстояніямъ. Группировка, принятая нами, приведена ниже.

Такимъ образомъ по первой предварительной фазѣ получаются 31 моментъ наступленія и столько-же соотвѣтствующихъ эпицентральныхъ разстояній. Не дѣлая никакихъ спеціальныхъ предположеній, можно комбинировать эти данныя попарно и изъ каждой пары опредѣлять неизвѣстныя a и b помощью формулъ (141), (142) и (140). Получивъ такимъ образомъ рядъ близкихъ между собою величинъ a и b, можно изъ нихъ брать среднее и затѣмъ окончательно уравновѣсить согласныя между собою наблюденія по способу наименьшихъ квадратовъ.

§ 84. Въ данномъ случаѣ можно, однако, поступать гораздо проще, имѣя въ виду, что найденныя Wiechert'омъ числа [уравненіе (73)] уже довольно близко подходятъ къ истинѣ. Опредѣлимъ z въ (140) помощью этихъ чиселъ и замѣтимъ, что на основаніи (141) должно быть:

$$\frac{\sin\alpha}{z^T - \left(\frac{1}{z}\right)^T} = \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (209)$$

Отношеніе (209) вычисляется очень просто и быстро. Оказывается, что это отношеніе дѣйствительно почти постоянно, мѣняясь неправильно и только въ узкихъ предѣлахъ въ зависимости отъ ошибокъ наблюденій до станціи Бомбай на эпицентральномъ разстояніи 53°. Начиная со станціи Иркутскъ на разстояніи 60°, отношеніе (209) систематически уменьшается. Это доказываетъ, что законъ (48) справедливъ до эпицентральныхъ разстояній меньше 53°, начиная-же съ разстоянія не больше 60° уже нельзя пользоваться этимъ закономъ. Установивъ этотъ фактъ, можно по наблюденіямъ станцій, находящихся на эпицентральныхъ разстояніяхъ не

Землетрясеніе 28 декабря 1910 г.

Первая предварительная фаза.

№ №	Станціи.	$\overset{0}{(\alpha)}$	T_c	T_0	$T_0 - T_c$
			s	s	s
1	Катаніа	0° 47′	11.7	13	+ 1.3
2	Искіа	2 53	42.5	44	+ 1.5
3	Рокка ди Папа	4 13	62.2	59	— 3.2
4	Сараево	6 6	89.4	84	— 5.4
5	Пола, Фіуме	7 1	102.7	98.5	— 4.2
6	Бѣлградъ, Тріестъ, Загребъ, Падуа, Лайбахъ	7 40.6	112.2	110.2	— 2.0
7	Павіа, Темешваръ, Грацъ, Буданештъ, О'Дьялла	9 12	133.5	128.6	— 4.9
8	Вѣна, Мюнхенъ	10 15	148.1	151	+ 2.9
9	Гогенгеймъ, Тортоза	11 42.5	168.0	167	— 1.0
10	Гейдельбергъ, Краковъ, Плауенъ . . .	12 23	176.9	177	+ 0.1
11	Іена, Лейпцигъ	13 13	187.7	188.5	+ 0.8
12	Гёттингенъ, Аахенъ, Потсдамъ	14 11	200.2	206.3	+ 6.1
13	Утрехтъ, Гамбургъ	15 47.5	220.6	227	+ 6.4
14	Гарпутъ, Коимбра	18 31.5	253.8	256	+ 2.2
15	Юрьевъ	21 28	287.4	289	+ 1.6
16	Тифлисъ	22 33	299.4	303	+ 3.6
17	Пулково	23 41	311.6	307	— 4.6
18	Екатеринбургъ	34 38	414.9	413	— 1.9
19	Ташкентъ	40 45	463.0	453	— 10.0
20	Симла	50 15	527.3	532	+ 4.7
21	Бомбай	52 56	543.5	546	+ 2.5
22	Иркутскъ	60 3	582.4	606	+ 23.6
23	Оттава	64 41	605.2	637	+ 31.8
24	Бальтиморъ, Чельтенгамъ, Вашингтонъ	68 43	623.8	664	+ 40.2
25	Виквесъ [Vicques]	72 0	638.0	676	+ 38.0
26	Зи-ка-вей	82 9	677.0	728	+ 51.0
27	Манила	92 40	711.2	793	+ 81.8
28	Батавія	94 48	717.1	802	+ 84.9
29	Мельбернъ, Сидней	142 24.5	807.8	1158	+ 350.2
30	Апіа	154 6	818.5	1218	+ 399.5
31	Кристчерчъ	163 53	824.1	1224	+ 399.9

больше 53° вычислить наиболѣе вѣроятныя значенія постоянныхъ на основаніи формулъ = (143) до (147). Этимъ путемъ я получилъ, принимая $R = 1$:

$$m = \sqrt{ab} = 0.002689; \qquad n = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} = 4.576$$

$$\pm 0.000057; \qquad \pm 0.135$$

между тѣмъ какъ по Wiechert'у:

$$m = 0.002652; \qquad n = 4.710.$$

Какъ видно, числа Wiechert'а близко сходятся съ найденными здѣсь величинами.

Нашему опредѣленію соотвѣтствуетъ:

$$a = 0.003340; \qquad b = 0.002165.$$

На основаніи этихъ величинъ получаемъ слѣдующее представленіе наблюденій.

Скачекъ между станціями Бомбай и Иркутскъ обнаруживается чрезвычайно рельефно. Максимальная глубина луча, соотвѣтствующая данному эпицентральному разстоянію, получается весьма просто по формуламъ (109) и (88). Имѣемъ соотвѣтственно станціямъ Бомбай и Иркутскъ:

$$r_m = 0.73\,R; \qquad r_m = 0.69\,R.$$

Это — радіусъ внутренняго ядра земли; онъ получился немного меньше, чѣмъ у Wiechert'а.

Болѣе подробное изслѣдованіе распредѣленія скоростей внутри земли уже выходитъ изъ рамокъ настоящей работы. Достаточно было доказать справедливость нашей основной формулы для наружныхъ слоевъ земли, съ которыми мы имѣемъ дѣло при опредѣленіи глубины очага землетрясенія. Замѣтимъ кстати, что разности $T_0 - T_c$ въ предѣлахъ первыхъ 50° эпицентральнаго разстоянія мѣстами обнаруживаютъ весьма слабый систематическій ходъ. Очень возможно, что это явленіе объясняется неоднородностями верхнихъ пластовъ земли, которыми мы здѣсь пренебрегли. Въ будущемъ, можетъ быть, удастся ясно обнаружить и принимать затѣмъ въ расчетъ и эти неоднородности. Пока во всякомъ случаѣ осторожнѣе ограничиваться небольшими эпицентральными разстояніями и опредѣлять постоянныя a и b или V и (ab) по возможности особо въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Этими соображеніями мы и руководствовались при рѣшеніи нашей главной задачи.

The principles of instrumental seismology.

By Pr. B. Galitzin (Golicyn).

Paper read at the general meeting of the fifth mathematical Congress at Cambridge on the 23d of August 1912.

Mr. President,

Ladies and Gentlemen!

Although the accounts of great earthquakes, accompanied by severe loss of human life and property, can be traced back to the most remote historical times, it is only perhaps about 20 years, that the science of earthquakes or *seismology*, considered as an exact and independent scientific discipline, exists. Former investigations concerning earthquakes, of which there were certainly no lack, and which were mainly due to the work of geologists and possessed of course their intrinsic scientific value, treated the question more from a descriptive or statistical point of view. The speedy advance and developement of seismology in the last 10—20 years, of which we all are witnesses, is nearly exclusively due to the fact, that seismology has seated itself down upon a sound scientific basis in adopting purely physical methods of research, based upon *instrumental observations*. This branch of seismology, i. e. *instrumental seismology* or so called *seismometry*, in devising its instruments of research, stands in close connection with theoretical mechanics, so intimately linked with pure mathematics. In this evolution of modern seismology the lead has gradually been handed over from geologists to astronomers and physicists, who are more familiar with the wielding of the mathematical apparatus.

Pure mathematics has had such a predominant and benevolent influence in the development of all branches of natural philosophy, that it may be perhaps quite appropriate to bring forth at this mathematical congress a brief outline of the principles of instrumental seismology.

The study of the movements of the earth's surface brings forth a whole set of purely mathematical problems, to some of them I shall allude in the course of my address, and in the resolving of which seismologists are highly in need of the scientific help of pure mathematicians.

According to modern views concerning the constitution of the planet we live upon, the earth consists of an outer shell made up of more or less heterogeneous rocks under which at a depth of say 30 or 50 kilometers lies a layer of plastic magma, which forms the material that feeds vulcanoes during their periodical outbursts. What lies underneath we are not very sure about. Evidently there is an interior core, which, although at a very high temperature, is subjected to such enormous pressures, quite inaccessible in our laboratory investigations, that matter in that state possesses for us as it were the proporties of a solid body. According to Wiechert's investigations, based upon the velocity of propagation of seismic rays, the physical properties of this interior core, partly formed of nickel and iron, which would well account for the mean density of the earth as a whole, vary as we go deeper and deeper down, but this variation is not always a continuous one. Wiechert's latest investigations lead to the conclusion, that there are three layers, seated respectively at the depths of 1200, 1650 and 2450 kilometers, where a sudden, discontinuous change in the physical properties of the inner core takes place.

So much for the inner constitution of the earth.

As regards the causes of earthquake outbreaks, these are traced back at present to three different origins.

The first class of earthquakes is intimately connected with the activity of volcanoes; the second class is due to the yeilding of underground hollows. Both types of earthquakes have mainly a local importance and are seldom felt at a great distance from the respective epicentres.

By far the most important and devastating earthquakes are the so called tectonic earthquakes, which are due to the relative shifting of underground layers of rocks. Some of these layers exhibit a most intense folding, brought into being by the gradual cooling and shrinking of the earth and where therefore the conditions of elastic equilibrium are very unstable. This unstability is sometimes so high, that it needs only a small exterior impulse, in order that the limits of elasticity should be exceeded. Then a sudden shifting of the layers takes place, accompanied by the outburst of a tectonic earthquake. As the focus or hypocentre of a tectonic earthquake lies usually comparatively deep, say 10—20 kilometers, the shock is felt at very great distances from the epicentre and sensitive seismographs record

the quake all over the earth's surface. In this case we have the so called world-recorded earthquakes, a great many of which, more or less intense, occur every year.

The original displacements engendered at the focus are transmitted through the earth's body according to the laws of propagation of elastic waves, which on reaching the earth's surface set in motion the respective seismographs installed there. These, when the problem of modern seismology is rightly understood, are always meant to give, after a shrewd analysis of the curves obtained, the *true* movement of a particle of the earth's surface at the given point.

To simplify matters the focus and epicentre are usually considered for not too small epicentral distances as being located in a point. This is certainly only a first approximation, but, considering the great dimensions of the earth, this approximation in most cases holds good.

The problem of propagation of seismic waves is therefore nothing else, than a problem of the theory of elasticity, according to which in an isotropic medium two distinct types of waves are propagated independently one from another, viz. longitudinal or condensational and transverse or distortional ones.

The respective velocities of these waves V_1 and V_2 are given by the following well known formulae:

$$V_1 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot \frac{E}{\rho}},$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\sigma} \cdot \frac{E}{\rho}},$$

where E denotes Young's modulus, σ — Poisson's coefficient and ρ the density of the medium.

Taking, according to Poisson, σ equel to $\frac{1}{4}$, we obtain

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3} = 1{,}732.$$

Neither of these velocities is constant, but depends upon the depth of the corresponding layer.

For the upper strata of the earth's crust these mean velocities can be easily deduced from seismometric observations in the vicinity of the epicentre of an earthquake. The observations give

$$V_1 = 7{,}17 \ {}^{\text{kil.}}/_{\text{sec.}}$$

and

$$V_2 = 4{,}01 \ {}^{\text{kil.}}/_{\text{sec.}},$$

therefore

$$\frac{V_1}{V_2} = 1{,}788$$

or

$$\sigma = 0{,}27,$$

which is very near the number adopted by Poisson for the majority of isotropic bodies.

The longitudinal waves, travelling the quickest from the focus to the station of observation, mark on their arrival the begining of the first preliminary phase of an earthquake, usually denoted by the symbol P (undae primae). After an interval of time, usually a few seconds, the seismograms show a sudden deviation of the seismographic record. This moment corresponds to the arrival of the first transverse waves and is denoted by the symbol S (undae secundae).

The greater the distance Δ to the epicentre, reckoned along the great circle joining the epicentre with the station of observation, the greater will be the difference between S and P.

From observations made during several known earthquakes, with well located epicentres, special tables have been computed, which give the possibility of determining the epicentral distance to a given station from the difference of time of arrival of the first longitudinal and distortional waves.

Besides these two characteristic types of seismic disturbances, which can be deduced theoretically and whose existence is confirmed by direct observation, there exists another class of waves, the so called gravitational, long or surface waves (undae longae), which travel along the surface of the earth with a constant mean velocity V of about $3{,}53 \ {}^{\text{kil.}}/_{\text{sec.}}$.

On searching for particular integrals of the general equations of the theory of elasticity and taking into consideration the boundary conditions for the earth's surface Lord Rayleigh and H. Lamb have shown that the existence of these long waves can be proved theoreticaly. A remarkable result of this investigation is, that the velocity of these surface waves forms quite a definite fraction of the velocity V_2 of propagation of the distortional waves in the uppermost layers of the earth's crust, namely

$$V = 0{,}9194 \ V_2.$$

Taking $V_2 = 4{,}01$, this would give $V = 3{,}69 \ {}^{\text{kil.}}/_{\text{sec.}}$, which differs only slightly from the above given number, deduced from observations at Pulkovo during the great Messina earthquake on December 28 1908.

The arrival of the long surface waves at a given station constitutes the beginning of the real maximal phase on a seismogram. At its beginning and during both preliminary phases the movement of an earth's particle in a given direction is a very intricate one, consisting of a superposition of several, rather irregular waves; but with time, in the maximal phase itself, the amplitude gets to be much larger and the movement much more regular, displaying often a whole trail of regular harmonic vibrations. The corresponding periods of these waveform movements vary usually between 12 and 20 seconds or more.

After the maximal phase is over, the movement becomes again very irregular, but some particular periods, say 12 and 18 seconds, seem to predominate. According to Wiechert's views these movements are due to proper vibrations of the earth's outer shell or crust, a question which has not as yet been thoroughly investigated and where there is ample work for pure mathematical research, which would be most welcome to seismology. This latter part of a seismogram is known under the name of Coda, but its physical meaning is far from being clear and evident even up to the present day.

On the adjacent plate, giving the reproduction of a seismogram traced at Pulkovo by an aperiodic horizontal pendulum, with magnetic damping and galvanometric registration, during an earthquake in Asia Minor on February 9 1909, the different above mentioned phases can easily be traced.

This is a very typical seismogram in which all the phases are particularly well seen. Usually the first phase (P) can be easily detected, but there is sometimes much trouble about fixing the beginning of the second phase (S), when the seismographs are not of a highly sensitive type, and this difficulty may have, as we shall see later on, its theoretical reason.

The determination of the velocity of propagation of the surface waves offers no trouble, when it is possible to fix the time of arrival of one and the same maximum at stations, situated at different distances from the epicentre. But the same velocity can also be deduced during big earthquakes by comparing the times of arrival of a certain maximum in the trail of surface waves, which arrive to the point of observation by the shortest way from the epicentre (t_1) and in the trail of waves which reach the observatory from the other side, after having travelled round the earths surface (t_2). In this case, if we denote with Δ the epicentral distance, we will have

$$V = \frac{40000 - 2\Delta}{t_2 - t_1} \text{ kil./sec.}$$

By measuring also the corresponding parts on the seismogram and deducing therefrom the amplitudes of the true movement of an earth's particle, it is possibly to calculate the coefficient of absorption of seismic surface energy. Measurements made at Pulkovo give for this coefficient 0,00028 when the distances are measured in kilometers. This would mean, that the energy of the surface waves at a point situated at 180° from the epicentre, i. e. in the antiepicentre, would be only $\frac{1}{270}$ part of the original energy in the epicentre itself. It is not be forgotten, that in the antiepicentre the different seismic surface waves meet again together in one and the same point.

The above mentioned theory of surface waves, based upon the general differential equations of the theory of elasticity, leads to another very important and interesting result, and that is, that when a trail of surface seismic waves passes a given place each particle of the earth's surface describes an ellipse, whose vertical axis is 1,47 times the corresponding horizontal one. This curious theoretical relation has not been as yet thoroughly tested, but the preliminary calculations based upon observations with highly damped, in fact aperiodic seismographs made at Pulkovo show, that this ratio is somewhat smaller than the theoretical value 1,47, and it varies a little from one trail of waves to another. The greatest value observed up till now did not exceed 1,28.

This fact does not mean in the least that there is a real contradiction between theory and observation. This discrepancy may be and is most probably due to the fact, that the theory does not take into account the damping effect upon the waves, as they travel along the surface of the earth and this damping may be totaly different for vertical and horizontal displacements. Except that, observations seem to point to the fact thas the period of seismic surface waves augments with the path traversed by the waves along the surface of the earth. This question opens another vast field for delicate mathematical enquiry.

Returning to the two types of waves, which, starting from the focus of an earthquake, travel through the interior of the earth, it is more practical and convenient to consider, as in optics, not the seismic waves themselves but the corresponding seismic rays.

If the law, giving the relationship between velocity and depth were exactly known, there would be no difficulty in calculating the theoretical path traversed by the seismic rays. According to Fermat's principle seismic rays must travel along brachistochronic paths. Expressing this result in mathematical language one is led to two integral expressions, giving in a

general form the time T, required for a seismic ray to travel from the focus to the point of observation, as well as the epicentral distance Δ, as function of the angle of emergency e of the ray and of the depth of the focus h. By angle of emergency one understands the angle formed between the tangent to the seismic path, where the latter strikes the earth's surface, with the horizontal plane at the point of observation.

If one eliminates e from both these integral expressions, one obtains T as function of Δ and h, which gives the form of the so called theoretical hodograph for both types of seismic rays:

$$T = F(\Delta, h).$$

To calculate F one must make certain assumptions, concerning the dependance of the velocity upon depth. Even very simple assumptions, holding good for only small intervals of depths, lead to rather awkward and clumsy mathematical expressions, which nevertheless are fairly adapted for numerical calculations.

The formula above shows distinctly that the form of the hodograph is dependent on the depth of the focus and this dependence makes itself principally evident for small epicentral distances, a fact that has not been sufficiently considered as yet by seismologists of the day. The corresponding curve has also a particular point of inflexion. From observations of the times of arrival of the longitudinal seismic rays at stations, situated at different distances Δ from the epicentre, it is possible to deduce the depth of the focus of the corresponding earthquake. This is a very delicate problem, which has seldom been treated in a satisfactory manner, the observations beeing usually too faulty, as this method requires very exact absolute time-reckoning, considering the comparative great velocity of propagation of the longitudinal waves in the upper layers of the earth's crust.

I have lately applied this method of determining h to the big earthquake felt in the south of Germany on November 16 1911 and for which we have more or less reliable observations from a whole set principally of German stations, surrounding the epicentre and furnished with damped seismographs.

As result I obtained

$$h = 9{,}5 \text{ klm.}$$

with a mean error of $\pm$ 3,8 klm.

Considering that h is usually small, one can as a first approximation, when Δ is not very small, suppose the focus to coincide with the epicentre;

then one has simply

$$T = F(\Delta),$$

where T is the difference of times of the arrival of the first seismic waves at a given point and the outbreak of the earthquake in the epicentre itself.

The form of this mean hodograph can be deduced from direct observations of earthquakes with well located epicentres. Seismologists have been very busy lately in trying to perfect these mean hodographs, but there is still a lot of work to do.

It is even to a certain point doubtful if such a mean hodograph really exists. Strictly speaking every earthquake has its own particular hodograph, depending upon the depth of the focus; but even if we admit that $h = 0$, still T may be dependent upon the direction from which the seismic rays reach the observatory and in general upon the geological formation of the layers of the earth's crust, through which these particular rays have travelled.

Then it is highly probable, and this fact has been emphasized by Professor Love, that there exists, in analogy with optics, a seismic dispersion. In that case the velocity of propagation of seismic waves would be dependent on their period and each particular trail of waves would have its own hodograph.

This question of seismic dispersion is of the highest importance for modern seismology, but it is a mathematical problem, which has not been thoroughly investigated as yet.

When the form of the hodograph for the longitudinal waves is known, it is very easy to determine the angle of emergency e for a given seismic ray.

One has for that the following formula:

$$\cos e = V_1 \frac{dT}{d\Delta},$$

where V_1 is the velocity of the longitudinal waves in the uppermost layers of the earth's crust.

This simple and elegant formula can be deduced from the general integrals, giving T and Δ als function of e or through a very simple geometrical process. It holds good for any given depth of focus, if only one takes the corresponding hodograph.

We have just seen, that the form of the mean hodograph depends upon the law, governing the relationship between velocity and depth. This law is not known à priori, but plotting out the form of the hodograph from

direct observations, it is possible to go backwards and deduce conclusions, concerning the velocity of propagation of longitudinal and torsional waves at different depths. This is the method followed by Wiechert and his scholars and which has led to many very interesting conclusions concerning the interior constitution of the earth, whereby Wiechert has applied with success one of Abel's purely mathematical theorems.

The principal result of this investigation is, that both velocites V_1 and V_2 augment with the depth attaining at the depth of about 1500 kilometers respectively the values of 12,7 and 6,9 $^{kil.}/_{sec.}$, after which they remain for some time practically constant.

In the very inner core of the earth, from a depth of about 3000 kil. inwards, these velocities seem again to diminish. The law of variation of V_1 and V_2 with depth is not, as has been stated before, always a continuous one.

The study of seismic rays opens as we see a whole new field of enquiry into the interior constitution of the earth and at such depths, which are utterly out of reach of the investigations of the geologist. These rays, travelling through the mysterious and inaccessible regions of the interior realm of our planet bring with them some information of what nature has wrought in those profound depths. Like the optical rays, coming from the heavenly bodies, which bring with them some learning, concerning the chemical constitution of the different stars and by the shifting of the spectral lines enable us to determine their translatory velocity in the line of vision, the seismic rays, when carefuly studied and catalogued, will certainly enable us in future to solve the mystery of the earth's interior constitution.

The knowledge of V_1 and V_2 at different depths does not allow us to determine separately Young's modulus E and the density ρ. All that we can obtain from our theoretical formulae at present is the ratio $\frac{E}{\rho}$ and Poisson's coefficient σ, but that is already a vast achievement. These investigations show in particular that σ up to very great depths retains its same numerical value as at the earth's surface, i. e. 0,27.

A remarkable feature revealed by instrumental observations of earthquakes concerns the length of time of the earth crust's shiverings at distant stations and near the epicentre itself. Whereas in the interior boundaries of the epicentral area nearly every earthquake is characterized by several distinct more or less intense shocks, separated by short intervals of utter calm, the whole seldom lasting for more than a few minutes, the seismograms obtained at distant stations reveal a continuous movement of the earth's surface, without any interruptions, which might correspond to the occasional

lulls in the epicentral area itself, the whole lasting for ever so long, sometimes over an hour and more.

The reason of this expansion of the earth's quiverings in time may be due to three different causes.

Firstly, besides the usual types of seismic waves that reach the point of observation by brachistochronic paths, there may be a whole set of other waves, which come to the same point after having suffered different reflexions and refractions among the interior heterogeneous layers of the earth's crust, as well as one or more reflexions at the earth's surface. These latter waves have already been studied and discussed.

Another striking fact in connection with inner refraction and reflexion seems to present itself and that is, that for certain big epicentral distances the seismic rays seem not to reach the earth's surface at all, throwing on it as it were a seismic shadow of the interior core.

Secondly, it is highly probable that seismic waves of high intensity are able to start proper oscillatory movements of the earth's outer shell, characterized by special periods of vibration. The fact is known that one severe earthquake can set loose at a very considerable distance another twin-earthquake.

Thirdly, if seismic dispersion exists, and according to the general laws of physical phenomena it must exist, different types of waves with different periods would reach the point of observation at different times and this reason would also well account for the stretching out of seismograms at distant stations.

Referring to seismic dispersion, it may be stated here, that if one repeats the remarkable investigations of Lord Rayleigh and H. Lamb concerning the properties of seismic surface waves, introducing into the general eqations of elasticity a frictional term, one is immediately led to a seismic dispersion, which in comparison with optics, may be characterized as an anomalous dispersion, for the shorter the period is, the greater will the velocity of propagation of the corresponding wave be. The equations lead also naturally to a certain damping effect, characterized by the fact, that the shorter the period, the greater will the damping be.

Both facts seem to stand in agreement with the results of direct observations, although the question has not been studied out thoroughly as yet for lack of sufficient trustworthy and reliable data and on account of the novelty of the problem itself.

In the different theoretical investigations referred to until now it has always been implicitly admitted, that the different interior layers of the

earth, considered in their mean distribution in a particular shell, although varying in their physical properties with depth, still retain the properties of an isotropic medium.

Seismology at the present date, in studying the propagation of seismic waves, cannot possibly take into consideration the heterogeneity of different rocks in the earth's crust, revealed by accurate geological research, and is necessarily obliged to suppose some mean distribution of different layers to get hold of the general outlines of the phenomena to study. When these are settled, it will be a further problem to take into consideration different discrepancies, caused by various geological anomalies. This way of treating the problem seems plausible enough, especially if we go down to depths exceeding the surface of isostacy, i. e. 120 kilometers.

But are we right, in adopting even such a mean distribution of matter in each layer, to consider the corresponding medium as an isotropic body?

Rudzki finds that we are certainly wrong and in that respect I suppose he is right enough, and it is only the difficulty of the problem that has obliged seismologists to have recourse to the equations of the theory of elasticity meant for isotropic bodies.

The results obtained can be certainly of the highest importance, but nevertheless they must be considered as only a first approximation to reality.

The problem, treated in a general way for anisotropic bodies offers certainly very great difficulties and here again seismology is very much in need of the friendly help of the pure mathematician.

Notwithstanding the difficulties of the question Rudzki set bravely to work at the problem for the case of a medium, which he defined as transvers isotropic.

Starting from the expression of the potential of the elastic forces, as given by Professor Love, Rudzki studied the form of the meridian section of the surface of a seismic wave, propagated through the interior of the earth, which led him after much trouble to a curve of the 12-th degree, containing three special branches. One branch of elliptical shape corresponds to the longitudinal, whereas the two others to distortional waves. One of these latter branches has a most curious shape, exhibiting 4 double points and 8 cusps (points de rebroussement). When this particular part of the wave surface would come to strike the surface of the earth at the point of observation the second phase S on the seismograms could not be sharply defined and under certain circumstances would correspond to three different shocks, following closely one after the other.

It would be most desirable, that such investigations started by Rudzki should be taken up by mathematicians and worked out with a view of application to different seismological problems.

Modern seismology, which has led already to so many interesting and important results and which opens a vast field for further theoretical and experimental enquiry is based upon instrumental observations, furnished by self-recording seismographs. The latter must be so adjusted, as to be able to give after a careful analysis of the records the true movement of a particle of the earth's surface. What we want are not seismoscopes, which only give relative indications of the earth's quiverings, but trustworthy seismographs.

The problem, considered from a kinematical point of view, stands thus.

Taking a small element of the earth's surface and placing in it the origin of a fixed system of rectangular coordinate — axes, this element may experience, as the result of a near or distant earthquake, 6 different movements, viz. three displacements parallel to these axes and three corresponding rotations. The rotations about horizontal axes correspond to a tilting of the ground. The complete study of the earth's movements at a given point requires therefore 6 different seismographs, each of which is to give the corresponding movement of the earth's surface as function of time and this for the whole duration of the corresponding quake. This is the generalized, fundamental problem of modern seismometry which offers so many practical difficulties, that at the present date it has never been treated in this exhaustive way.

Although direct, non instrumental observations in localities, which have suffered much from earthquakes, prove undoubtedly, that all these six movements do in reality exist, still for distant earthquakes the tilting of the ground is comparatively so small, seldom exceeding $\frac{1}{50}''$, that at the present date seismologists confine themselves only to the study of the three displacements, one in the vertical and the two others in horizontal directions at right angles to each other.

To study the *absolute* movements of a particle of the earth's surface, which alone is of real practical importance for seismological investigations, one requires a fixed point, not taking part in the movements of the upper layers of the earth's crust. As no such point is to be had, seismology is obliged to have recourse to the principle of inertia and seek this immovable point in the centre of oscillation of a pendulum in its so called *steady point*. But this point is only steady for a sudden impulse communicated to the ground. After that, the movement of the ground continuing, the pendulum begins to

sway to and fro and its real movement gets very intricate, being a combination of enforced vibrations caused by the real movement of the earth's surface together with the proper movement of the pendulum itself, which is usually a harmonic, slightly damped oscillation.

In former times simple vertical pendulums were much used. But as it was found necessary, in order to augment the sensitiveness of the record obtained, to give the pendulum a very long proper period of oscillation, one passed gradually to horizontal pendulums, where the axis of rotation forms a very small angle with the vertical line and where the proper period of oscillation can be in consequence made very long. A horizontal pendulum is a very handy apparatus, which can be made highly sensitive and where the movement of the pendulum can be inscribed mechanically by a pin on smoked paper fixed upon a revolving drum, or optically by means of a beam of light reflected from a small mirror attached to the pendulum and concentrated thereafter on a revolving drum clad with sensitive photographic paper. In Milne's horizontal pendulum the beam of light passes through two slits at a right angle to each other, one of which is fixed to the boom of the pendulum itself. To study the true horizontal movements of the ground two such pendulums are required at right angles to each other.

There are many types of horizontal pendulums, which, although having various outward looks, differ essentially only by the mode of suspension of the heavy mass.

There are pendulums with two pivots, type Rebeur-Paschwitz; then pendulums with one pivot below and where the boom is upheld by two strings or wires going upwards and fixed to the column of the apparatus, type Omori-Bosch, Milne. When mechanical registration is used, it is necessary, in order to diminish the perturbating influence of the friction of the recording pin on the smoked paper, to use very heavy masses. But in this case the pressure sustained by the pivot is very great and it easily gets blunt, in consequence of which the sensitiveness of the apparatus will be diminished and its position of equilibrium may get shifted. To avoid this fatal effect of the blunting of the pivot one can use instead of a steel point an inverted flat steel spring; then there is no more trouble about the blunting and one can use very heavy masses. This arrangement is adopted in Mainka's heavy horizontal pendulums and in those horizontal seismographs, which have been installed lately at Russian second class seismic observatories.

By far the most delicate and sensitive suspension is the Zöllner suspension, where there are no pivots and therefore scarcely any friction at

all and where the boom of the pendulum with the heavy mass is supported by two inclined wires, the one going up and the other down. This type of pendulum is particularly adapted for the study of distant earthquakes and the tidal deformations of the earth under the influence of the attraction of the sun and moon. Such pendulums are used at the Russian first class seismic observatories.

Simple vertical pendulums with a comparatively short period and where the movement is divided by means of a simple mechanical contrivance into two rectangular components are still used in Italy: Vicentini's pendulum.

Another type of horizontal seismograph, installed at many seismic observatories, is the Wiechert's inverted, astatic pendulum, where the heavy mass is above and rests upon a pivot or rather on cross flat springs fixed below. In this position the pendulum is in an unsteady state of equilibrium, but is prevented from toppling over by means of crossed springs attached to the heavy mass.

There are certainly other types of horizontal seismographs, but the principal ones have been mentioned above.

For the study of the vertical component of the movement of the ground special vertical seismographs are used, although a systematic study of this component has only begun just lately and there are still very few observatories, that posess a corresponding instrument. These seismographs are based upon the use of a spring.

The simplest type of a vertical seismograph is Vicentini's instrument, where the heavy mass is simply attached to a strong flat spring; but as the proper period of oscillation of such a spring is very short, the sensitiveness of the records is comparatively small.

In Wiechert's seismograph the heavy mass is suspended by several powerful vertical spiral springs, where as in the Russian type of vertical seismograph, a copy of which is installed at the observatory of Eskdalemuir in Scotland, the boom carrying the heavy mass revolves about a horizontal axis placed at the end and is upheld in a horizontal position by only one spiral spring. By fixing the lower point of suspension of this spring under the centre of gravity, it is possible to obtain a comparatively long proper period of oscillation of the instrument, say 13 to 14 seconds, conserving at the same time the necessary stability for continuous seismometric work.

To augment the sensitiveness of all types of seismographs, especially when mechanical registration on smoked paper is used, one has recourse to magnifying levers. These latter sometimes cause a good deal of trouble, being much subjected to the influence of changes of temperature and introducing special errors in the records owing to the inevitable failures in

the fixing of the joints. It is always preferable, when seismometric work of a high degree of accuracy is planned, to use the optical method of registration, which requires no levers and introduces no friction.

It is true that the sensitiveness of this optical method of registration has a certain limit not to be exceeded, as the sensitiveness of photographic paper does not admit placing the revolving drum at distances greater than 4 meters from the seismograph. In this case, when a high sensitiveness of the records is desired, it is very advantagous to use the galvanometric method of registration, which is very simple in its theory and practice, requires no levers, introduces no friction and where the magnification can be pushed to limits far exceeding those of other practical methods of registration.

This method, which can be easily applied to all types of instruments, consists in fixing to the end of the boom of the corresponding seismograph several flat induction coils, placed between the poles of a pair of strong horse-shoe magnets. Now, when the boom is set in motion, electric inducted currents are generated in the spires of the coils, their intensity beeing proportional to the angular velocity of the displacement of the boom. This electric current is led by two wires to a highly sensitive dead-beat galvanometer of the Deprez-D'Arsonval type, whose movements are registered on a revolving drum by the usual optical method by means of a beam of light reflected from a small mirror attached to the moveable coil of the galvanometer. In this way it is not the amplitudes of the seismograph's movements, but the corresponding velocities which are directly recorded, which makes no real practical difference for the study of seismic harmonic waves.

This galvanometric method of registration offers several important advantages.

First of all, one can place the galvanometer and registering part of the seismograph at any desirable distance from the pendulum itself in a convenient and easily accessible place and not disturb the seismograph every day or even twice a day when changing the paper on the revolving drum. This possibility of registering at a distance is certainly very convenient.

Secondly, as what one registers corresponds to the velocities and not to the amplitudes of the pendulum movement, the normal position of equilibrium of the pendulum itself is no longer of such importance; it may shift a little without causing any trouble at all. This is particularly important for the vertical seismograph, where the steel springs are so subject to the influence of a change of temperature, that they usually require a special adjustment for temperature compensation. With the galvanometric registration no such compensation is necessary.

Thirdly, the magnification obtained with this method is very great;

for certain periods of waves it can be easily made to exceed 1000 and this result is attained without the use of any levers at all, which gives the possibility of using comparatively small masses of only a few kilogramms, which makes the instruments compact and handy. The sensitiveness of the instrument can thereby be easily changed between very large limits by simply changing the distance of the poles of the corresponding horse-shoe magnets.

Lastly, the galvanometer, being a most sensitive apparatus, it is possible to place the revolving drum comparatively near, say 1 meter, from the mirror of the galvanometer, which enables one to obtain very sharp and distinct records. In fact the curves come out so clearly and of such magnification, that it is nearly always possible to fix the different phases on the seismograms. The observations made at Pulkovo show in fact, that very often one is able to locate an epicentre from one station alone by a special method, shortly to be described, when other stations fail to give even the beginning of different phases.

This method of registration has been adopted for all Russian first class seismic observatories and by some observatories abroad. This method is also used at Eskdalemuir.

It would seem desirable if possible to go yet a step further and by introducing induction currents of the second order to get at the direct registration of the acceleration of the pendulum movement, which would be of the greatest importance for the study of the true movement of the ground. This idea was suggested in a paper, published by Professor Lippmann, but the experiments he and I made, show that these secondary currents are so feeble, that no practicable application of this principle is possible at present.

Let us now consider what conditions a seismograph must fulfil to be able to record in the most trustworthy way possible the true motion of the ground.

The motion of a horizontal or vertical seismograph subjected to displacements of the ground in a given direction, say $x = f(t)$, can be represented by a differential equation of the following form:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

where θ is the angle of deviation of the instrument, ε a constant, which depends upon the rate of damping, $T = \frac{2\pi}{n}$ the proper period of oscillation for $\varepsilon = 0$ and l the reduced pendulum length.

The motion of a dead-beat galvanometer, coupled with the seismograph, is governed by the following equation:

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

where φ is the angle of deviation of the galvanometer, $T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ its proper normal period and k a constant, which characterises the magnification of the record.

Supposing, to simplify matters, that x corresponds to a trail of harmonic seismic waves with the period T_p; θ as function of the time t will be represented by a curve, being a superposition of enforced oscillations with the same period T_p and the proper movement of the pendulum itself. To get rid as soon as possible of this latter movement and obtain a more truthful record of the movement of the ground it is indispensable to augment the damping of the instrument, driving it if possible to the limit of aperiodicity and making it dead-beat.

Then one obtains a very simple formula, which enables one to calculate very easily the true amplitude of the movement of the ground. The same holds good also for galvanometric registration. Special tables, lately published, make all the necessary calculations very easy and simple indeed. When damping is introduced there is always a small shifting of phase, which can easily be taken into consideration, but which unfortunately most seismologists neglect.

There is no doubt that aperiodic pendulums give much more faithful records, even if x is a complicated function of t. This has been proved by experiments with a moveable platform.

Some seismologists seem to be afraid to use dead-beat pendulums, notwithstanding all their theoretical and practical advantages, fearing that the sensitiveness of the records will be too greatly diminished. But this is, generally speaking, an utter error; all depends on the proper period of oscillation T of the seismograph itself and on the period T_p of the corresponding seismic wave. For instance, an aperiodic pendulum with a proper, normal period of 25 sec., will be, beginning with periods of seismic waves of 16 sec., *more sensitive* than a 12-second pendulum with a comparatively small damping ratio 5 to 1. For $T_p = 40$ sec. the sensitiveness will be twice as great.

Therefore there is nothing to fear from aperiodicity, one must only take a corresponding longer proper period T. But even if the magnification came to be too short for some seismic waves, galvanometric registration would compensate tenfold all the possible loss in sensibility.

On the contrary, what one ought certainly to be afraid of and avoid is the use of wholly undamped seismographs, as their records sometimes come out very distorted and give quite an erroneous impression of the true movement of the ground. Consider, as example, only the case of a faint trail of seismic waves passing the observatory, but whose period T_p is very close to the proper period of oscillation of the pendulum itself. The corresponding seismogram would show then very large amplitudes of oscillation, which would have nevertheless nothing to do with the true motion of the ground, being only a casual effect of resonance. Of course with aperiodic instruments the magnification is not constant, but depends also on the period of the waves and this dependence must be taken into consideration when working out seismograms, but still the general outline of the record is very similar to the true motion of the ground, at all events it can be easily deduced therefrom. When undamped seismographs are used it requires a minute and tiring analysis of the curves to eliminate the proper motion of the pendulum and get at the true amplitudes and periods of the corresponding seismic waves and no man will ever give himself the immense trouble to go over all this work for each earthquake, although the study of the true motion of the ground is the most important problem of modern seismology. Simple experiments with a moveable platform show in the most evident way how misleading undamped seismographs can be.

The advantages of damping are theoretically and practically so evident, that there are few seismologists of the day who would venture to uphold a contrary opinion, but this fundamental maxim, i. e., that in order to study the true motion of the ground only damped seismographs ought to be used, has not yet found its practical realization in all countries. It is to be hoped nevertheless that with time all seismographs, of whatever type, will be furnished with some one or other damping adjustment; the scientific value of the records obtained thereby will be greatly increased.

It is also necessary, in order to be able to study the short seismic waves, which are sometimes of great importance, that the revolving drum should rotate with a sufficient velocity and as uniformly as possible. As a desirable minimum one might propose $15\,^{m}/_{m}$ in the record to the minute; in Russia the velocity for all the new instruments is double as great.

There are different means of introducing damping in a seismograph. Some instruments have air-, others oil-damping, but one of the simplest means to effect the same is to use magnetic damping. One has only to fix to the boom of the corresponding seismograph a copper plate placed between the poles of two strong horse-shoe magnets. By bringing the poles nearer to each

other, the damping ratio can be augmented and the instrument easily brought to the limit of aperiodicity.

The advantages of this kind of damping is its extreme simplicity and the possibility of being easily adjusted to any type of seismograph. Moreover it agrees absolutely with the theoretical conditions of equation (1), for according to the physical laws of electro-magnetic induction the momentum of these retarding forces is strictly proportional to the angular velocity of the corresponding instrument. No other form of damping conforms strictly to this law.

Returning now to the general problem of seismometry, i. e. to the determination of a given component of the movement of the ground, say $x = f(t)$, for a given interval of time, for instance from P up to the coda, we meet with considerable theoretical and practical difficulties. Poincaré and Lippmann proposed in a general way to integrate the equation (1) term by term between 0 and a given interval of time t. This would lead to two squarings of the seismographic record and would seem simple enough, if only the function $x = f(t)$ had no singular points with two tangents (points angulaires). But these singular points do in reality exist and correspond to the times, when a new trail of waves strikes the point of observation. Nevertheless the problem can be solved, although those, who, like Pomerantzeff and Arnold, have busied themselves with the question have found it a most delicate and troublesome problem, requiring immense accuracy and circumspection.

But supposing that we have found by some means or other x as function of t and this for all three rectangular displacements, there arises a new problem, where the aid of pure mathematicians would again be of the greatest importance.

We have supposed that we have found $x = f(t)$, but what we want to know is of what elements this curve is built up. Guided by the general laws of physical phenomena we may well admit that $f(t)$ consist of a superposition of waves, having their respective amplitudes, periods, initial phase and last not least special damping ratio. But how are we to separate these waves one from another, even if we manage to decipher in the curve one or two particular periods? The methods of usual harmonic analysis would fail in this case, as we must necessarily admit that all these vibrations are damped. Here is a problem of seismology which will certainly stand before us in the future and it would be highly gratifying if pure mathematics would clear the way to its solution before the problem itself practically arises.

If I may allow myself a short disgression and if it is not too bold of me to say so in such a distinguished assembly of pure mathematicians, I

should like to express the wish that mathematicians should look down a little more condescendingly on the impending necessities of physical research. There are in fact so many different questions and problems brought up by physics and its sister sciences, which remain at a stand — still owing to the mathematical difficulties they involve. Either we obtain a differential equation which cannot be integrated, or we meet with some clumsy integral, which does not admit of evaluation and which we are quite ready to throw away.

When it comes to numerical calculations things go on smoothly enough and one is sometimes struck, what a simple and elegant curve a very awkward and intricate formula will give; evidently it could be expressed with quite sufficient accuracy for practical use by a much simpler function. This would be of great importance for further investigations, if we only had at the same time a criterion for the value of the error thereby envolved. What we want are not absolutely strict and exhaustive, but practical, approximate solutions, which would enable us to get on with our work. If I may venture to say so, we want a whole set of different, well tabulated functions, which may be utterly uninteresting to pure mathematicians, but may nevertheless be of much importance for physical research.

I shall quote only a very simple and trivial example.

A closer study of the proper movement of a horizontal pendulum, inscribing its corresponding curve with a pin on smoked paper, shows that the movement is no longer a harmonic damped oscillation, but is represented by the following differential equation:

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2(y + \rho) + \xi\{y' + \nu y\}^2 = 0,$$

where ξ and ρ are two new constants, depending upon the elements of friction, whereas ν depends upon the revolving velocity of the recording drum. These latter must necessarily be taken into consideration if one wants to deduce the true movement of the earth's surface from seismographic records on smoked paper. Now what is one to do with such an equation? In our case the question is simple enough, for ξ is small and one can use the method of succesive approximations, but there are corresponding physical problems, where this assumption holds no longer.

Similar problems arise when treating the question of the theoretical form of the hodograph and so forth, but I shall not dwell upon this any longer.

The readings of seismograms obtained by galvanometric registration from aperiodic seismographs enable us to attack different problems which are of great importance for modern seismology.

By measuring the first maximal amplitude of the displacement of the recording light-spot directly after the arrival of the first longitudinal waves, one can deduce therefrom the true displacements of a particle of the earth's surface for two rectangular horizontal directions. This enables one to determine directly the azimuth from where the first seismic waves have come and combining this result with the epicentral distance, deduced from the difference of time of the arrival of S and P, locate the epicentre from observations made *at one seismological station alone*. The analysis of the record is certainly more complicated than in the case of the maximal phase, for the time, separating the beginning of the movement till the first maximum, is very short, usually 1 or 2 seconds, and one is necessarily obliged to take into consideration the influence of the proper motion of the pendulum itself, but the problem can nevertheless be mastered and auxiliary tables facilitate all the necessary calculations. If the proper periods of both pendulums are equal to one another and to those of the corresponding galvanometers the problem gets to be exceedingly simple and the azimuth can be deduced at once. In this special case one need not suppose the presence of a harmonic seismic wave, but the true displacement of a particle of the earth's surface can be quite an arbitrary function of time.

There is only one difficulty in the question which consists in this.

Observations show, that in some cases the first movement of the ground is from the epicentre and in some others towards the epicentre, the first corresponding to a condensational and the second to a dilatational wave front. There is therefore an ambiguity in the azimuth of 180°, but the use of the vertical seismograph settles the question at once. If the latter points to the fact, that the first movement of the ground was upwards, the wave will be a condensational one and vice versa. This does away with all ambiguity and the epicentre can be fairly located.

This method of locating epicentres has the advantage over others, that it does not require as usual the observations from several other stations, but is dependent only on observations made at one and the same place, but in order to obtain good results it requires special highly sensitive and properly adjusted seismographs. This method is always used at present at the seismological observatory at Pulkovo; it has also often been tested at Eskdalemuir; the results have always been most satisfactory, if only the first phase on the seismogram is distinct enough.

This fact, namely the possibility of determining the azimuth of the epicentre by the method just described, can be considered as a direct experimental proof, that the first seismic waves that reach a given point are really due to longitudinal vibrations.

This same method of determining the true direction of the movement of an earth's particle can also be applied to the second phase, where the first transverse waves strike the ground. This enables us to find the true plane of oscillation or call it plane of polarization of the corresponding waves and opens a new way to the study of the geological particularities of the upper layers of the earth's crust.

By measuring the true vertical and corresponding total horizontal displacement of an earth's particle z and h at the very beginning of the first phase of a seismogram one can deduce the visible angle of emergence $\bar{e}$ of the seismic rays:

$$tg\,\bar{e} = \frac{z}{h}.$$

This angle differs a little from the true angle of emergence e, as defined above, for when a seismic wave strikes the earth's surface a part of the movement is reflected inwards towards the interior of the earth. The true relationship between these two angles is a very delicate problem of the theory of elasticity, which has been treated by Wiechert and in this country by Professor Knott, although perhaps not in quite an exhaustive way. The problem I dare say requires yet further consideration being of great importance to seismology, as it is the true angle of emergence which is the most characteristic element in the study of the path, traversed by the seismic rays. If Wiechert's formula stands good, the difference between both angles e and $\bar{e}$, starting from an epicentral distance $\Delta = 1500$ kil. upwards, never exceeds 2 or 3 degrees of arc. For small epicentral distances $\bar{e}$ is considerably greater than e, and for $\Delta = 0$ $\bar{e}$ would be 22°, whereas e would be 0.

The study of the angle of emergence for short epicentral distances is of very great importance. It could be conducted by means of artificial quakes, occasioned by the springing of underground mines. Such experiments would also tend to augment our very scanty knowledge, concerning the laws of propagation of different types of seismic waves in the uppermost layers of the earth's crust in connection with the geological formation of the corresponding rocks. Another question would be the study of the propagation of seismic disturbances occasioned by the oscillatory movements of heavy engines and their influence upon the stability of different types of buildings. Such investigations have been conducted, but till yet on a very scanty scale, and there is still a vast field open for further scientific enquiry.

A scrupulous and systematic comparative study of records obtained at different observatories with highly sensitive instruments of the same type would open the way to the knowledge of the laws of propagation (velocity,

damping) of different types of seismic waves, but all this work is yet to be done.

Seismology is still in its period of infancy and has not had time to work out all the different problems it nearly daily brings forth, some of which are of the highest importance for geophysics, but there is no doubt that it will master them with time, as it has taken the right line of work, based upon trustworthy instrumental observations.

I may just allude here in passing to the part seismology has taken in solving the great geodetical problem of the tidal deformations of the earth, about which English mathematicians have been so keen and which is so intimately connected with this town of Cambridge, owing to the work of our venerated president Sir George Darwin. As these deformations are of the bradiseismical or slow type, they do not require damped instruments.

There are still many discrepancies which have to be explained and which the observations, undertaken by the care of two international scientific bodies, namely the international geodetical and the international seismological associations will certainly clear up.

I may just mention here a new and important paper on the subject published lately by doctor Schweydar of Potsdam, which tends to throw much light on the subject and which is in full agreement with the masterly investigations of Professor Love of Oxford.

Till yet we have considered only the tachiseismic displacements of the ground, excluding the rotations or tilting, these being for distant earthquakes so very small. But when a seismic wave travels along the earth's surface, a certain tilting of the ground, however small, must necessarily take place and for comparatively small epicentral distances it certainly cannot be neglected.

But by what means are we to study this tilting?

When the tilting is slow the usual horizontal pendulum is the best adapted instrument, as it is for studying the tidal deformations of the earth, but what are we to do, when the tilting is quick and combined, as in the case of earthquakes, with corresponding displacements?

Schlüter proposed for that object a kind of balance with a very long period, which he called klinograph, but the observations made therewith at Göttingen and Pulkovo show that it gives very scanty information and has since then been abandoned.

A remarkable instrument for its elegance and simplicity was divised, if I am not mistaken, by M^{r} Horace Darwin and Davison and constructed

in this very town of Cambridge by the Cambridge scientific instrument company. It consists of a heavy mass suspended by two vertical wires of unequal length. When a tilting takes place about an axis lying in the normal plane of the wires, the instrument turns about a small angle, which can be easily measured with great accuracy. By diminishing the distance and augmenting the difference of length of the two wires it can be made most sensitive, accusing even $0{,}0012''$ in the tilting of the ground.

This would stand good if we had only to do with tilting alone, but in the case of earthquakes there are simultaneous displacements, which set the apparatus swinging to and fro and each such swing engenders a corresponding twisting of the instrument, so that there is no possibility of separating the two effects of displacement and tilting one from another. The mathematical theory of this instrument offers many curious and suggestive peculiarities and leads to a differential equation, also found in the theory of celestial mechanics.

The same difficulty of separating both movements arises with the horizontal pendulum.

If we denote with ψ the angle of tilting about an axis parallel to the boom and with g the acceleration of gravity, we will have, instead of equation (1), the following generalized equation:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Now what we measure directly is θ or, in the case of galvanometric registration, φ (see equation (2)). Therefore there is no possibility whatever of separating with one pendulum x from ψ.

But a special contrivance can be imagined, which will enable us to eliminate x and get at the true tilting of the ground.

Imagine quite a similar pendulum with the same proper period and same damping ratio placed at a distance s above the first. Then its differential equation will be

$$\theta_1'' + 2\varepsilon\theta_1' + n^2\theta_1 + \frac{1}{l}(x'' + s\psi'' - g\psi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Suppose now that both these pendulums are coupled with the same galvanometer, but so, that the induction currents from each flow in opposite directions. Then the motion of the galvanometer will depend only on the *difference* of the angular velocities $(\theta_1 - \theta)'$ and x'' will be fully eliminated.

Such a double pendulum enables us therefore to study the true tilting of the ground, quite undisturbed by any displacements.

A similar apparatus has been tested on a moveable platform and has given most satisfactory results. The platform was subjected simultaneously to a tilting and shifting movement, the latter sometimes of the most irregular kind, still the instrument recorded only the tilting, quite heedless of all displacements.

This double pendulum can be easily made extraordinarily sensitive, detecting angles of tilting down to say 0,0001″.

The practical study of tilting has not as yet been taken up systematically by seismology; this problem is reserved for the future.

We have considered until now only the small movements of the earth's surface or so called microseisms, revealed to us by very sensitive seismographs, which, when properly adjusted and damped, enable one to deduce the true movement of the ground. The same problem arises for larger or macroseismic movements, experienced in the epicentral and surrounding areas. A profound study of the true motion of the ground in regions, characterized by their seismic activity, is of vital importance for elaborating practical rules for the construction of aseismic buildings, able to resist in a satisfactory manner the dangerous quiverings of the ground. Nothing stands in the way of adopting for this kind of investigations the same principles of instrumental research that have been already discussed with regards to microseismic activity. It is only necessary to diminish considerably the sensitiveness of the seismographs and give them a very solid construction; simple, vertical, damped pendulums could be of great use for this kind of study. Very little has been done in this line of work up to the present day, as a systematic study of different seismic areas, requiring observations at many different points, envolves a great expense and requires a trained scientific staff of observers not usually to be found. One confines oneself for the present to measuring the intensity of the seismic activity by means of purely empirical scales, like those of Rossi-Forel, Mercalli or the new scale of Sieberg, based upon personal observations, gathered through newspaper-news or through special enquiry. These data serve to draw the isoseists or curves of equal seismic intensity.

It is quite evident how defective such a way of proceeding is and how little dynamical value one can attribute to such experimental data.

What we require is a simple process of evaluating the intensity of the seismic movement by means of a simple, but rational, purely dynamical scale, accessible to every untrained observer and that would give immediately the corresponding maximal acceleration of the ground's movement or at least of its two rectangular horizontal components. Such a scale can be made on the

principle of overturning of rectangular blocks, subjected to a swaying movement of the base they rest upon.

The proper movement of such a block offers many interesting particularities, among which I may mention that the half-period of oscillation, when the axis of rotation passes from one rib to another, is proportional to the square root of the maximal deviation. The study of this movement is intimately connected with the problem, which is known, if I am not mistaken, in the Cambridge university as the Union gate problem.

The question now arises, what are the conditions of stability of such a block, resting on a plane, subjected to harmonic oscillations, when a slipping of the block is prevented. The dynamical equations of the problem can comparatively easily be deduced, but they are not much adapted for further discussion, involving a discontinuous function of time, namely the angular velocity of the movement of the block, when the motion passes from one rib to another. Here is another case where seismology requires a helping hand from the pure mathematician.

As far as I know this problem has not as yet been mathematically solved in a general way, but experimental observations with a small moveable platform have settled the matter.

Observations show that the conditions of stability of such a block on a base, oscillating harmonically, does not depend of the period T or the amplitude of oscillation x_m alone, but of a certain combination of both, namely

$$w_m = \frac{4\pi^2 x_m}{T_p^2},$$

which is nothing else but the maximal acceleration of the movement of the ground.

There is an extremely simple relationship between the dimensions of this homogenous block and the value of w_m which defines the limit of stability.

If $2h$ denotes the hight and $2c$ the thickness of the block, we have simply

$$\frac{c}{h} = 0{,}0012\, w_m,$$

where w_m is expressed in centimeters and seconds.

When w_m is greater than this critical value the block will turn over and fall.

This equation has been established experimentally; it holds good for a wide range of values of w_m. Surely it could be deduced mathematically.

Now here is a means of establishing a rational, dynamical scale for

the study of the maximal horizontal acceleration of the ground's movement, which is of all importance to seismology.

One only has to prepare a scale of such blocks and judging after a seism, which of these blocks have fallen down and which have remained upright, one can obtain two limits for the maximal acceleration of the earth's true movement. Two sets of blocks, placed at right angles to each other, will give an indication of the approximate direction of the principal seismic disturbance.

Convulsive shakings of the ground produced by earthquakes are far from beeing a rare phenomena; on the contrary, since instrumental observations have been established, it is extraordinary what an immense number of earthquakes, large and small, have been recorded. It will not be exagerating to state that several hundreds of earthquakes occur yearly; in fact there is scarcely a day that passes without the earth's surface shaking in some part of the world. But besides these, there is a constant pulsatory movement of the earth's surface going on, which is more prominent in the winter months and which is characterised by very regular seismic waves with short periods, varying from 4 to 10 seconds. These movements can be detected on all three components and they produce the impression, as if the earth were actually breathing. A systematic study of these particular microseisms has begun only lately and their real cause is still involved in mystery. According to one hypothesis these pulsatory oscillations are due to the shocks of sea waves on steep coasts. To test this theory a special wave-counter made here in Cambridge by the Cambridge scientific instrument company has been set up in this country at Newcastle-on-Tyne; the observations have been confided to Mr Morris Airey, but the results have not as yet been published.

The remarkable fact that these tremors have been detected in the most different parts of the world and even at a depth of 1000 meters under the earth's surface would seem to indicate that we have to do here with proper vibrations of the earth's outer crust. The amplitudes of these periodical movements are in reality very small, but they can easily be detected and studied by means of modern seismographs, whose sensibility is so great, that displacements of the order of 0,1 of a micron can easily be measured with accuracy.

Another striking peculiarity of these oscillations is, that there seems to be a marked relation between the amplitudes and periods of oscillation, viz. the longer the period the larger will the amplitude be. This feature is not characteristic of ordinary harmonic oscillations and well deserves a dynamical and mathematical study.

Except these regular micro-tremors, there are other types of oscillatory, although less prominent movements of the ground, with comparatively long periods, produced by winds, the shifting of barometric depressions and heat-waves. They all deserve to be thoroughly studied.

There are a great many other problems, which modern seismology has brought to the front, but I will not dwell upon these questions for lack of time any longer.

One of these problems is of the most vital practical importance and that is, is there any hope of being able in time to foretell the outbreak of a brewing earthquake and thereby contribute to the saving of human life and property?

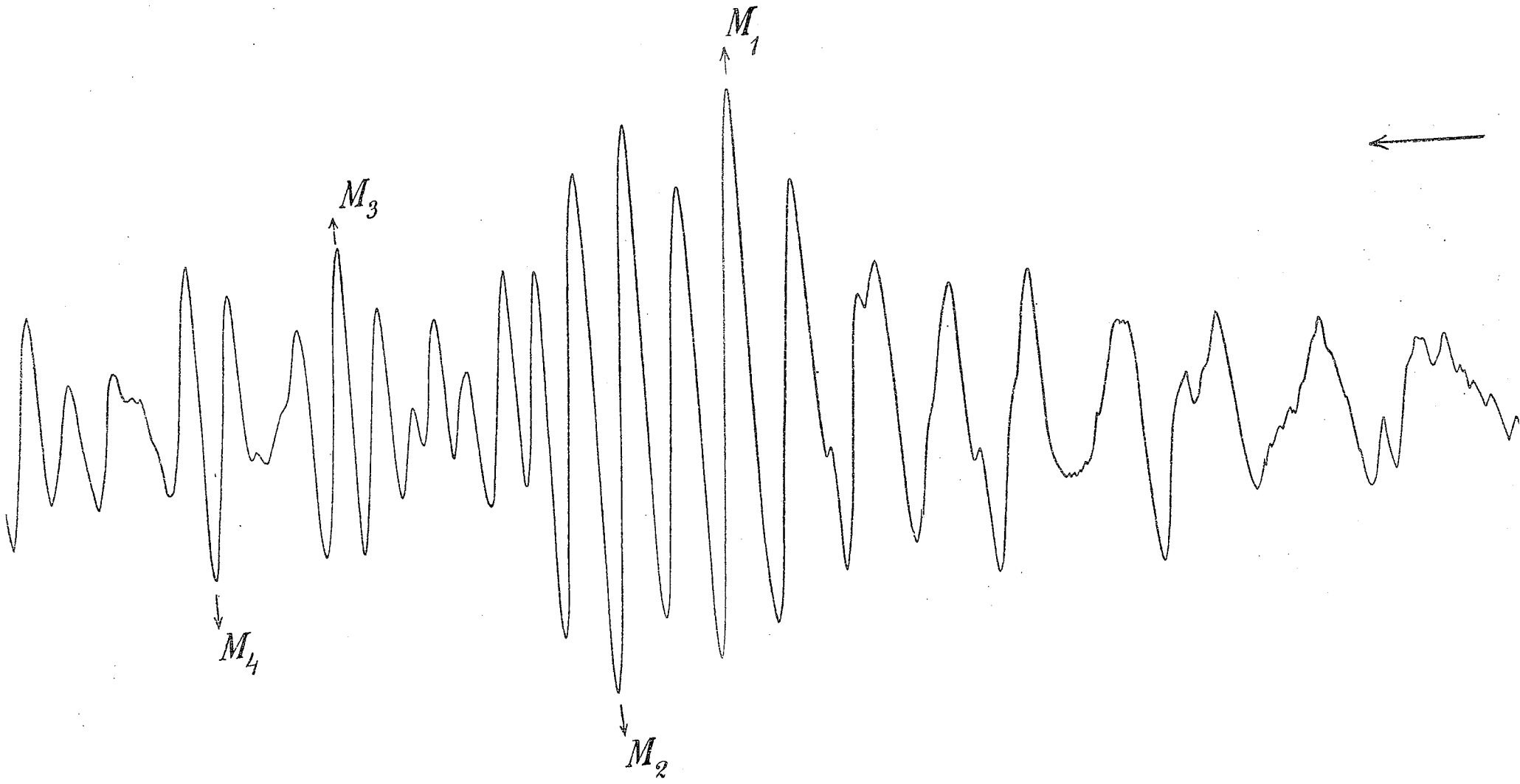
The problem offers mighty difficulties, but the case is not so utterly hopeless as it might seem, for the investigations of v. Kövesligethy and others show, that we may still hope in time to get at a practical solution of the question.

I should like before closing just to mention a curious relationship which has been suspected between the frequency of earthquakes and the movement of the earth's pole.

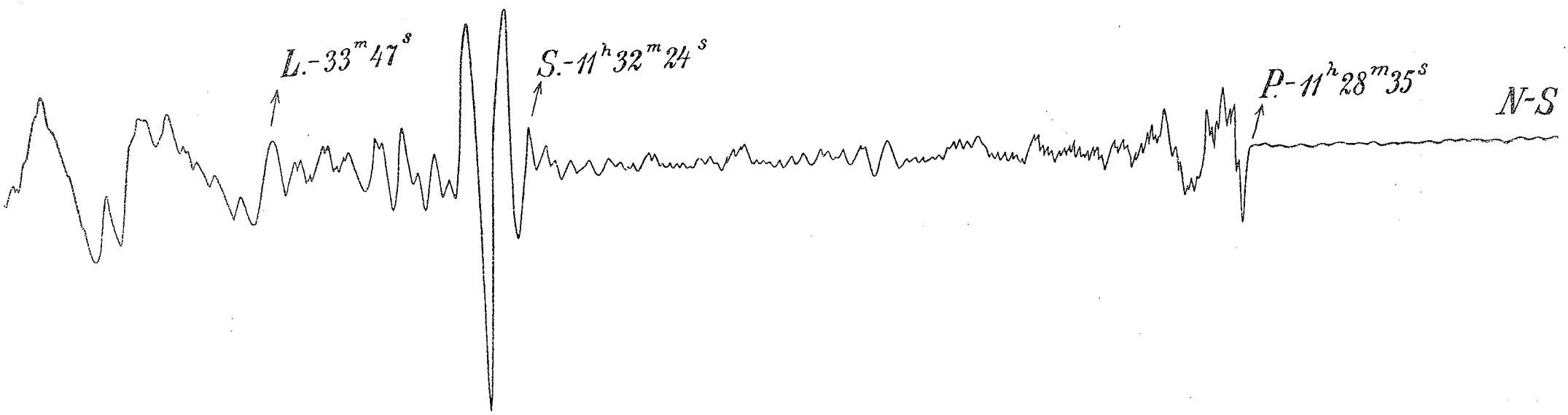
There are ample reasons to believe that some correlation between both phenomena may really exist and it would be of great importance for geophysics if we could manage to detect in some way or other the shifting of interior masses of the earth produced by severe tectonic earthquakes. Well this seems really practically possible by means of Baron Eotvös' gravimeter, an instrument of the highest sensitiveness, which enables us to detect the presence or displacements of comparatively very small masses. Such observations have been planned in Russia for the Turkestan seismic regions and two gravimeters have accordingly been ordered; one of them has already arrived and is being tested. The observations are to be conducted at particular points in the vicinity of prominent tectonic lines, indicated by geologists, and repeated again after a new, but fairly inevitable earthquake will visit those unhappy, for their unstability, but otherwise beautiful regions.

I have now come to the close of my address and I feel particularly indebted with gratitude to the organizers of this fifth international mathematical Congress for their kind invitation to give a lecture on the principles of instrumental seismology, the basis of all modern seismological work, at this assembly.

You will have seen during this last hour how many seismological problems require further mathematical treatment and it is useless to mention how welcome and important the friendly help of the pure mathematician


M_1
M_3
M_4
M_2

9-II-1909



would be to the seismologist, standing bewildered in front of the weird and intricate problems of modern geophysics.

I think that no place like this country and specially Cambridge could have been chosen more appropriately for the delivering of such an address, as it is particularly England that so often has had the lead in scientific seismological work. Passing over the former important work of Mallet, Oldham and others, I should just like to bring to your memory all that your countryman John Milne has done for modern seismology. He, together with Ewing, can be considered as the father of instrumental seismology; it is he, who through his remarkable activity and energy has covered the earth's surface with a whole net of seismic observatories, gathering useful seismometric records, bearing at the same time all the burden of this vast organization nearly exclusively on his own shoulders. And not only that. I may fairly say, that there are not many questions of modern seismology that have not been attacked by Milne long before any other person had thought about them. This remarkable activity has not, notwithstanding years, relaxed in the least, a proof of which we see in the very important catalogue of earthquakes Milne has lately brought out.

Then come the theoretical and in many cases most remarkable studies of so many Englishmen like Lord Kelvin, Lord Rayleigh, Sir G. Darwin, H. Lamb, Love, Larmor, Schuster, Knott and many others on different problems of geophysics, relating to questions of the highest importance.

It is also in England that the fertile idea of creating an international seismological association was born. Since then this idea has been taken up by Rebeur-Paschwitz, Gerland and others and this scientific body brought into life, contributing by the collected work of its members to raise the veil over the mystery, that still enshrowds the natural phenomena, connected with the periodical quiverings of the earth's crust.

Zur Frage der Bestimmung der Herdtiefe eines Bebens und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen in den oberen Erdschichten.

Von Fürst B. Galitzin (Golicyn).

Die Frage nach der Bestimmung der Herdtiefe eines Bebens ist von manchen Autoren behandelt worden. Eine ausführliche Zusammenstellung und Besprechung der früheren Arbeiten befindet sich in Herrn Rosenthal's Aufsatz «Объ опредѣленіи глубины очага землетрясенія»[1]), deshalb werde ich an dieser Stelle auf diese Frage nicht weiter eingehen. Herr Rosenthal selbst hat einen sehr wesentlichen Fortschritt zur Lösung dieser Aufgabe gemacht, indem er von der Voraussetzung einer krummlinigen Gestalt der Bahnen der seismischen Strahlen ausging und dieselben in erster Annäherung mit Kreisbögen identifizierte.

Ich habe dasselbe Problem etwa zu derselben Zeit und ganz unabhängig von Herrn Rosenthal aufgenommen und eine Anzahl von Formeln entwickelt, welche ich auf das Süd-Deutsche Beben vom 16. November 1911, inbezug auf welches ein ziemlich umfangreiches Beobachtungsmaterial vorliegt, angewandt habe. Ich ging dabei von den allgemeinen Gleichungen der seismischen Strahlen aus. Eine kurze Mitteilung über die gewonnenen Resultate habe ich der Pariser Akademie vorgelegt[2]).

In diesem Aufsatz werde ich diese Frage schon ausführlicher behandeln. Obgleich die allgemeine Theorie der seismischen Strahlen, welche die Grundlage dieser Untersuchung bildet, wohl bekannt ist[3]), glaube ich, dass

---

[1]) Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente T. V, Livr. 3.

[2]) Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. T. 155, № 5. p. 375. 29 Juillet 1912.

[3]) Man vergleiche z. B. meine «Vorlesungen über Seismometrie». St.-Petersburg. 1912.

es der Uebersichtlichkeit und Verständlichkeit halber wohl zweckmässig sein wird, dieselbe auch hier nochmals darzulegen und die Beweise für die verschiedenen Formeln anzuführen.

Mit der Darlegung dieser allgemeinen Theorie werde ich also anfangen.

Es wird hier nur von longitudinalen seismischen Wellen, resp. Strahlen, die Rede sein, aber alle diesbezüglichen Ueberlegungen lassen sich unmittelbar auf transversale Wellen übertragen.

Anstatt die seismischen Wellen zu betrachten, ist es viel zweckmässiger, wie in der Optik, den Begriff der seismischen Strahlen einzuführen und nur mit diesen zu operieren. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v derselben hängt von den elastischen Eigenschaften und der Dichte des betreffenden Mediums ab. Nimmt man an, dass dieselben in einer und derselben Schicht in der Entfernung r vom Erdzentrum dieselben Werte behalten, so wird v nur eine Funktion von r sein. Die entsprechenden Werte für die aller obersten Erdschichten werden wir resp. mit v_0 und r_0 bezeichnen.

Es ist für die weiteren Untersuchungen zweckmässig statt v seinen reziproken Wert $n = \frac{1}{v}$, resp. $n_0 = \frac{1}{v_0}$, einzuführen. Diese Grösse n können wir als Brechungsindex der seismischen Strahlen bezeichnen.

Die seismischen Strahlen, die aus einem bestimmten Punkte im Herde eines Erdbebens ausgehen, pflanzen sich bis zu den verschiedenen Beobachtungsorten auf brachistochronischen Bahnen fort, für welche das betreffende Zeitintervall bis zur Ankunft der Strahlen ein Minimum wird. Dies ist eine unmittelbare Folge des Fermat'schen Prinzips.

Infolgedessen wird das Brechungsgesetz der seismischen Strahlen genau dasselbe sein, wie das der optischen Strahlen.

Trifft z. B. ein seismischer Strahl aus dem Medium (1) mit dem Brechungsindex n_1 unter dem Einfallswinkel i_1 in das Medium (2) mit dem Brechungsindex n_2 ein, so bildet er in diesem Medium mit der Normale zur Trennungsfläche den Winkel i_2, wobei die Beziehung

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

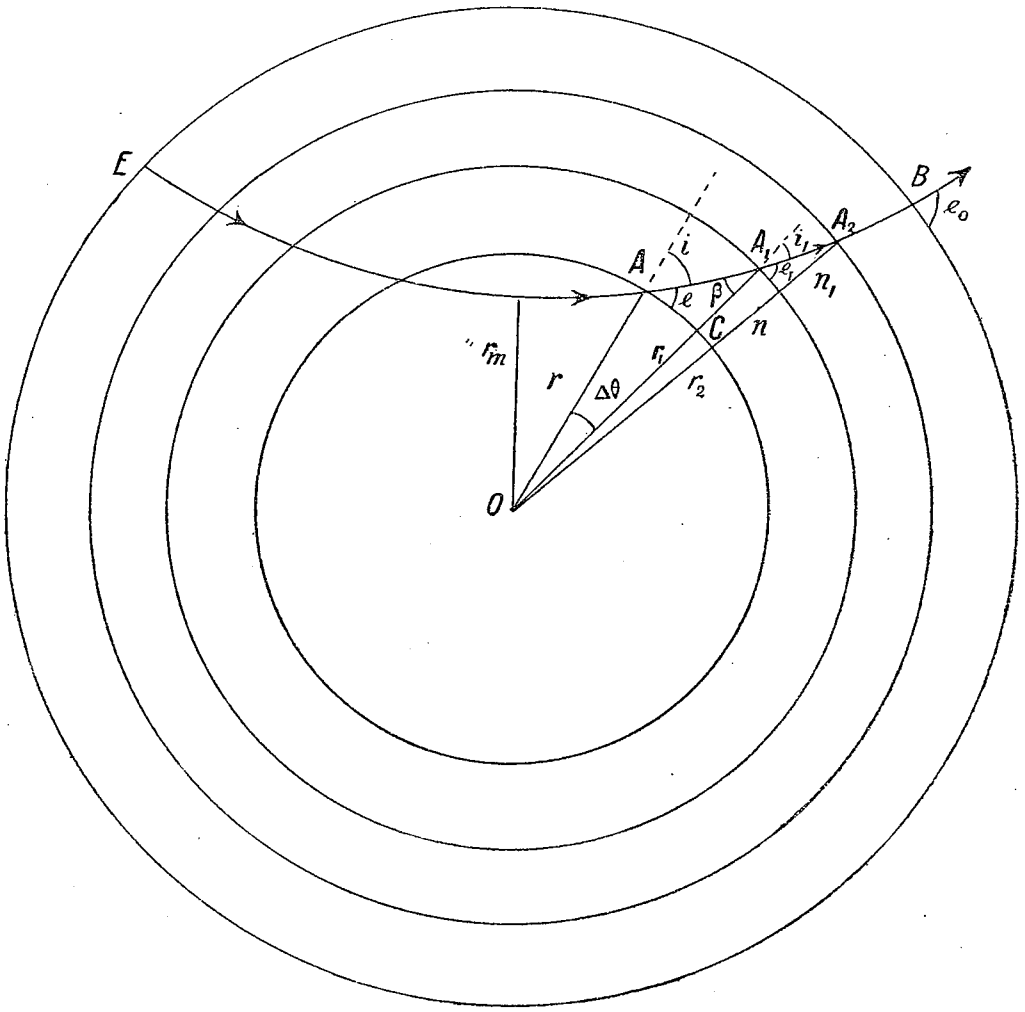
besteht.

Aus dieser Beziehung lassen sich die fundamentalen Gleichungen für die seismischen Strahlen inbezug auf ihren Verlauf im Erdinneren unmittelbar ableiten.

Auf der folgenden Fig. 1 bedeute die krumme Linie EAB die Bahn eines seismischen Strahles, welcher die Punkte E und B auf der Erdoberfläche mit einander verbindet.

Der Ausgangspunkt dieses Strahles kann ein beliebiger Punkt auf der Strecke EAB sein.

Fig. 1.



Die kürzeste Entfernung dieses Strahles bis zum Erdzentrum sei r_m.

Die Tangente zur Bahn des seismischen Strahles in einem beliebigen Punkte derselben A bilde mit der Oberfläche der entsprechenden konzentrischen Schicht den Winkel e. Für die kleinste Entfernung $r = r_m$ ist $e = 0$ und für die Erdoberfläche $r = r_0$ erreicht es seinen maximalen Wert e_0. Diese Grösse heisst Emergenzwinkel; derselbe ist für die Theorie der seismischen Strahlen eine der wichtigsten und maassgebendsten Grössen.

Denken wir uns nun eine Anzahl von Kugelflächen mit den Radien $OA = r$, $OA_1 = r_1$, $OA_2 = r_2$ u. s. w. gezogen, die sehr nahe, resp. beim Uebergang zum Limes, unendlich nahe an einander liegen.

Den mittleren Brechungsindex in der Schicht zwischen r und r_1 wollen wir mit n und zwischen r_1 und r_2 mit n_1 bezeichnen.

Diese Schichten sollen so dünn sein, dass man die entsprechenden, in ihnen liegenden Bahnstrecken als gradlinig annehmen darf.

Aus der Fig. 1 ist ersichtlich, dass der Einfallswinkel im Punkte A_1 β und der Austrittswinkel $i_1 = 90 - e_1$ wird.

Es ergibt sich folglich auf Grund der Beziehung (1)

$$n_1 \sin i_1 = n \sin \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Wollen wir die Lage eines beliebigen Punktes auf der Linie EAB durch Polarkoordinaten r und θ bestimmen, wobei der Winkel θ von einem beliebigen Radius-Vektor aus gezählt werden kann.

Aus dem Dreieck OAA_1 ergibt sich nun

$$\beta = i - \Delta\theta;$$

ausserdem ist

$$n_1 = n + \Delta n$$

und

$$i_1 = i + \Delta i.$$

Bringen wir diese Werte in die Gleichung (2) ein, so folgt

$$(n + \Delta n) \sin (i + \Delta i) = n \sin (i - \Delta\theta),$$

oder, beim Uebergang zur Grenze,

$$\sin i \,.\, dn + n \cos i \,.\, di + n \cos i \,.\, d\theta = 0,$$

oder auch

$$d(n \sin i) + n \cos i \,.\, d\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Aus dem Dreieck AA_1C findet man weiter

$$r_1 - r = dr = r d\theta \,.\, \operatorname{cotg} i,$$

also

$$\cos i \,.\, d\theta = \frac{dr}{r} \cdot \sin i.$$

Bringt man diesen Ausdruck in die Formel (3) ein, so folgt

$$r\, d(n \sin i) + n \sin i\, dr = 0$$

oder, wenn man i durch $90 - e$ ersetzt,

$$d(nr \cos e) = 0,$$

also

$$nr \cos e = \text{const} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dies ist die fundamentale Beziehung für die Theorie der seismischen Strahlen. Sie sagt aus, dass längs der ganzen Bahn des Strahles das Produkt der drei Grössen n, r und $\cos e$ konstant bleibt. Den Wert dieser Konstante erhält man aus den Bedingungen für die äussere Fläche der Erdkugel.

Es ist also

$$nr\cos e = n_0 r_0 \cos e_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Bedeutet nun ds ein Linienelement der Bahn zwischen den Punkten A und A_1, so bekommt man aus der Fig. (1)

$$ds\cos e = r\,d\theta$$

und andererseits

$$ds = d\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Daraus folgt

$$\cos e\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = r$$

oder

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos e}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2 e}}.$$

Bringen wir nun hierin den Wert von $\cos e$ aus der Formel (5), so ergibt sich

$$d\theta = \frac{n_0 r_0 \cos e_0\, dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \cos^2 e_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Das ist die Gleichung für die Bahn des seismischen Strahles, welchem der Emergenzwinkel e_0 zukommt.

n ist eine gewisse Funktion von r:

$$n = \frac{1}{v} = F(r).$$

Wenn diese Funktion bekannt wäre, so liesse sich die Gleichung (6) sofort integrieren und man bekäme die wirkliche Bahn des seismischen Strahles.

Umgekehrt, lassen sich auf irgend einem Wege die verschiedenen Emergenzwinkel bestimmen, so kann man aus ihnen gewisse Schlüsse auf die Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Strahlen mit der Tiefe ziehen.

Wollen wir jetzt r und n in Bruchteilen ihrer Werte an der Erdoberfläche ausdrücken,

Dementsprechend setzen wir

$$\rho = \frac{r}{r_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

und

$$\nu = \frac{n}{n_0} = \frac{v_0}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Dann wird ν eine gewisse Funktion von ρ sein:

$$\nu = f(\rho).$$

Wollen wir noch

$$\cos e_0 = \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

setzen.

α ist ein gewisser Parameter, welcher den betreffenden seismischen Strahl charakterisiert.

Führen wir diese Bezeichnungen ein, so lassen sich die Formeln (5) und (6) folgendermaassen umschreiben:

$$\nu\rho \cos e = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

und

$$d\theta = \frac{\alpha d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$(\nu\rho)^2$ ist ebenfalls eine gewisse Funktion von ρ:

$$(\nu\rho)^2 = \varphi(\rho), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

welche Benndorf kritische Funktion genannt hat.

Für den tiefsten Punkt des Strahles, wo $e = 0$ ist, wird auf Grund der Beziehung (10) der Wurzelausdruck im Nenner der Formel (11) gleich Null, aber das entsprechende Integral muss, der Natur der Sache nach, endlich bleiben.

Wollen wir noch die Zeit dT berechnen, während welcher der Strahl das Bogenelement ds beschreibt.

Aus der Fig. 1 und der Beziehung (10) ergibt sich

$$ds = \frac{r d\theta}{\cos e} = \nu\rho \cdot \frac{r d\theta}{\alpha} = \frac{r_0}{\alpha} \cdot \nu\rho^2 d\theta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

also

$$dT = \frac{ds}{v} = n ds = \frac{n_0 r_0}{\alpha} \cdot \nu^2 \rho^2 d\theta.$$

Bringen wir hierin den Ausdruck von $d\theta$ aus der Formel (11), so wird

$$dT = n_0 r_0 \frac{v^2 \rho \, d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Von den Formeln (11) und (14) werden wir weiter Gebrauch machen.

Wollen wir noch zum Schluss den Krümmungsradius R des seismischen Strahles berechnen.

Bedeute $d\omega$ den Winkel zwischen zwei benachbarten Tangenten an der Bahnkurve des seismischen Strahles, so ist

$$\frac{1}{R} = \frac{d\omega}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Aus der Fig. 1 ersieht man, dass $\Delta\omega$ die Differenz zwischen den Winkeln β und i_1 ist; da $v_1 < v$, $n_1 > n$ ist, so wird $\beta > i_1$ sein.

Also

$$\Delta\omega = \beta - i_1.$$

Dann ergibt sich aus der Grundbeziehung (1)

$$\sin(i_1 + \Delta\omega) = \frac{n_1}{n} \sin i_1 = \left(1 + \frac{\Delta n}{n}\right) \sin i_1$$

oder

$$\cos i_1 \, \Delta\omega = \frac{\Delta n}{n} \sin i_1.$$

Gehen wir jetzt zur Grenze über, dann können wir, statt i_1, $i = 90 - e$ setzen, und es wird

$$d\omega = \frac{dn}{n} \cdot \operatorname{cotg} e$$

oder

$$d\omega = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dr} \operatorname{cotg} e \cdot dr.$$

Diese Gleichung können wir auch folgendermaassen schreiben:

$$d\omega = \frac{1}{v} \cdot \operatorname{cotg} e \, \frac{dv}{d\rho} \cdot d\rho.$$

Andererseits ist

$$ds = \frac{dr}{\sin e} = \frac{r_0 \, d\rho}{\sin e}.$$

Bringen wir nun diese Ausdrücke für $d\omega$ und ds in die Formel (15)

ein, so ergibt sich schliesslich

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0 v} \cdot \frac{dv}{d\rho} \cdot \cos e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

oder auch

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{d \lg v}{d\rho} \cdot \cos e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Nach Ableitung dieser allgemeinen Formeln für die seismischen Strahlen könnnen wir an unser Thema unmittelbar herantreten.

Auf der folgenden Fig. 2 bedeute H den Bebenherd, welcher in der Tiefe h liegen mag und dessen Entfernung vom Erdzentrum gleich r_1 sei. Ausserdem sei $\rho_1 = \frac{r_1}{r_0}$.

Dann wird

$$r_1 = r_0 \left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

und

$$\rho_1 = \left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Der Punkt E ist das entsprechende Epizentrum und die Punkte B, B_0 und B_1 verschiedene Beobachtungsorte.

Die Epizentralentfernung des Punktes B sei Δ und der entsprechende Winkel am Erdzentrum O gleich ϑ.

Es ist also

$$\Delta = r_0 \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Den veränderlichen Winkel 0 wollen wir von dem Radius OE aus messen.

Es müssen hier zwei Fälle unterschieden werden.

I Fall.

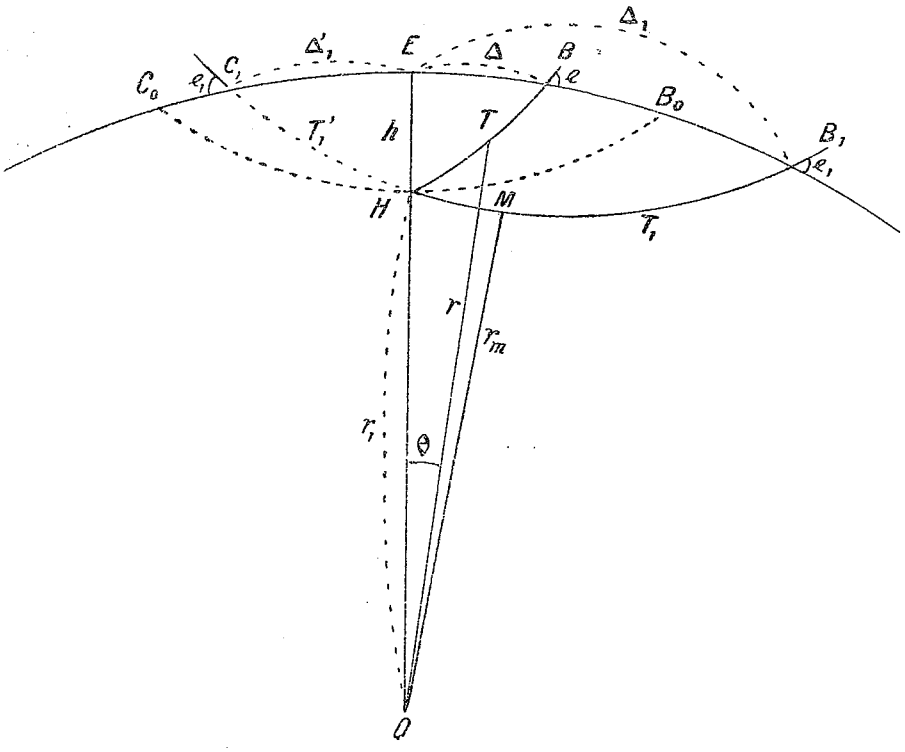
Der tiefste Punkt des Strahles liege ausserhalb der Strecke, welche H mit dem Beobachtungsort (B) verbindet. Epizentralentfernung Δ, Laufzeit von H bis B gleich T.

II Fall.

Derselbe Punkt liege zwischen H und dem Beobachtungsort (B_1). Epizentralentfernung Δ_1, Laufzeit T_1.

Die Kurve $C_0 H B_0$ entspricht dem Uebergangsfall, wo H gerade im tiefsten Punkt des entsprechenden Strahles liegt.

Fig. 2.



Aus den Formeln (11), (14) und (20) ergibt sich im I-ten Falle

$$\Delta = r_0 \alpha \int_{\rho_1}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

und

$$T = n_0 r_0 \int_{\rho_1}^{1} \frac{\nu^2 \rho d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Im zweiten Falle liegt der tiefste Punkt des Strahles in M in der Entfernung r_m vom Erdzentrum. Wollen wir die entsprechenden Werte von ν und ρ durch ν_m und ρ_m bezeichnen. Der Emergenzwinkel für diesen Strahl in B_1 sei e_1, also $\cos e_1 = \alpha_1$.

Derselbe Strahl bildet mit dem Horizont auch in C_1 denselben Winkel e_1.

Bezeichnen wir die Entfernung von C_1 bis E durch Δ_1' und die Laufzeit von C_1 bis H durch T_1', so wird, wie früher,

$$\Delta_1' = r_0 \alpha_1 \int_{\rho_1}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

und

$$T_1' = n_0 r_0 \int_{\rho_1}^{1} \frac{\nu^2 \rho d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Für die Summe der Entfernungen $\Delta_1' + \Delta_1$ und Laufzeiten $T_1' + T_1$ findet man aus denselben Differentialformeln (11) und (14), da alles symmetrisch inbezug auf den Punkt M sich verhält, folgende Ausdrücke:

$$\Delta_1 + \Delta_1' = 2 r_0 \alpha_1 \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}}$$

und

$$T_1 + T_1' = 2 n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2 \rho d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}}.$$

An der unteren Grenze dieser Integrale werden die Funktionen, die unter den Integralzeichen stehen, nach der Formel (10) unendlich gross werden; das hat aber weiter keine Bedeutung, da die entsprechenden Integrale endlich bleiben.

Es ergeben sich also für die Epizentralentfernung Δ_1 und die Laufzeit T_1 im zweiten Falle folgende Formeln:

$$\Delta_1 = 2 r_0 \alpha_1 \int_{\rho_m}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} - r_0 \alpha_1 \int_{\rho_1}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

und

$$T_1 = 2 n_0 r_0 \int_{\rho_m}^{1} \frac{\nu^2 \rho d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} - n_0 r_0 \int_{\rho_1}^{1} \frac{\nu^2 \rho d\rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Wenn $\rho_m = \rho_1$ wird (Uebergangsfall), so gehen diese beiden letzten Formeln in die Formeln (21) und (22) über, da jetzt $\Delta = \Delta_1$ und $T = T_1$ wird.

Nach Aufstellung dieser Gleichungen wollen wir zwei neue Variable einführen.

Es sei

$$x = \rho^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

also dementsprechend

$$x_1 = \rho_1^2 = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{h}{r_0}\right)^2$$

und

$$x_m = \rho^2{}_m = \frac{\alpha_1^2}{\nu^2{}_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Setzen wir noch

$$\xi = \frac{h}{r_0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

dann wird

$$x_1 = (1 - \xi)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

ξ ist immer eine sehr kleine Grösse.

ν^2 können wir als eine bestimmte Funktion von x auffassen; es sei auch bemerkt, dass ν^2 seinen Wert mit der Aenderung des Vorzeichens von r, resp. ρ, nicht ändert.

Die kritische Funktion

$$\varphi(\rho) = \nu^2 \rho^2 = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \rho^2 = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 \rho^2$$

ist auch eine gewisse Funktion von x, die wir durch y bezeichnen wollen:

$$y = \nu^2 \rho^2.$$

Der wahre Gang dieser Funktion ist uns unbekannt, aber wir wissen, dass

an der Erdoberfläche $\quad x = 1 \quad y = 1$

und im Erdzentrum $\quad x = 0 \quad y = 0$ wird,

da dort $\frac{v_0}{v}$ endlich bleiben muss.

In den oberen Erdschichten nimmt v mit Verkleinerung von ρ zu, folglich nimmt y mit Verkleinerung von x ab.

Der Gang dieser kritischen Funktion y zwischen $x = 0$ und $x = 1$ möge etwa durch die Kurve auf der folgenden Fig. 3 veranschaulicht werden.

Beschränken wir uns auf die oberen Erdschichten bis etwa 100 Kilometer Tiefe, welche nur etwa $\frac{1}{64}$ des ganzen Intervalls für x ausmacht, so können wir in erster Annäherung eine lineare Beziehung zwischen ν^2 und x annehmen, etwa von der Form

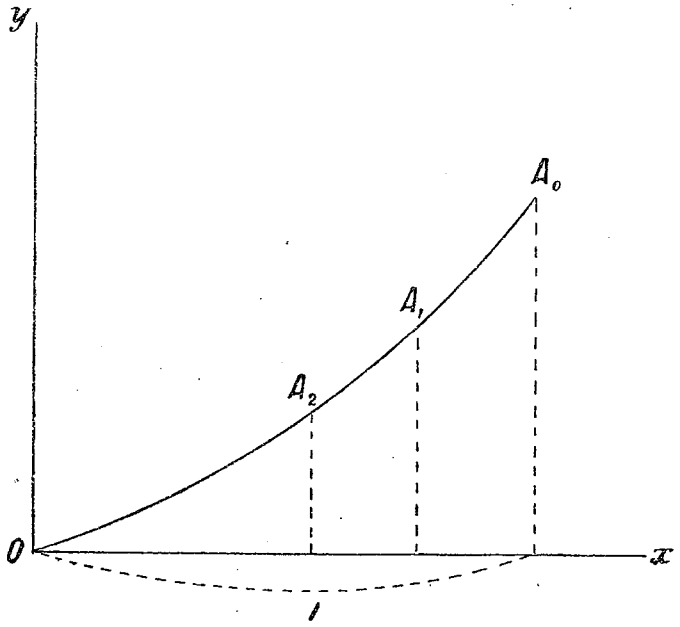
$$\nu^2 = b + cx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

und dementsprechend

$$y = bx + cx^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

setzen.

Fig. 3.



Im Punkte M (siehe die Fig. 2) wird $y = y_m$ sein, wo

$$y_m = \alpha_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

wird.

Da, für $x = 1$ $y = 1$ wird, so besteht folgende Beziehung zwischen den Koeffizienten b und c:

$$b + c = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Es ergibt sich also

$$y = cx^2 + (1 - c)x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Wäre die Geschwindigkeit v der Ausbreitung der seismischen Strahlen in den oberen Erdschichten konstant, so würde $c = 0$ sein.

Wenn die Geschwindigkeit v für eine bestimmte Tiefe bekannt ist, so kann man leicht c berechnen.

Es sei z. B. in 100 Kilometer Tiefe $v = v_{100}$.

Dann wird nach den Formeln (29) und (30) das entsprechende

$$x = \left(1 - \frac{100}{r_0}\right)^2$$

sein und nach den Formeln (31) und (34)

$$\nu^2 = \left(\frac{v_0}{v_{100}}\right)^2 = 1 - c + c\left(1 - \frac{100}{r_0}\right)^2 = 1 - 2c\frac{100}{r_0}\left(1 - \frac{100}{2r_0}\right)$$

oder

$$c = \frac{1 - \left(\frac{v_0}{v_{100}}\right)^2}{2\frac{100}{r_0}\left(1 - \frac{100}{2r_0}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Wollen wir nun diese neue Variable x und den Ausdruck für die kritische Funktion $\nu^2\rho^2 = y$ aus der Gleichung (35) in die früheren Integralformeln einsetzen.

Dann bekommt man:

Im I Falle:

$$\Delta = \frac{1}{2} r_0 \alpha \int_{x_1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

$$T = \frac{1}{2} n_0 r_0 \int_{x_1}^{1} \frac{\{(1-c) + cx\}\, dx}{\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

und

im II Falle:

$$\Delta_1 = r_0 \alpha_1 \int_{x_m}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha_1^2}} - \frac{1}{2} r_0 \alpha_1 \int_{x_1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha_1^2}} \ldots (39)$$

$$T_1 = n_0 r_0 \int_{x_m}^{1} \frac{\{(1-c) + cx\}\, dx}{\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha_1^2}} - \frac{1}{2} n_0 r_0 \int_{x_1}^{1} \frac{\{(1-c) + cx\}\, dx}{\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha_1^2}} \ldots\ldots (40)$$

Jetzt können wir zur Integrierung dieser Formeln übergehen.

Es sei I das unbestimmte Integral

$$I = \int \frac{\alpha dx}{x\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}}.$$

Dann findet man ohne Schwierigkeit für I folgenden Ausdruck:

$$I = \operatorname{arctg} \frac{-2\alpha^2 + (1-c)x}{2\alpha\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}}.$$

Setzen wir nun

$$w = \frac{2\alpha\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}}{2\alpha^2 - (1-c)x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Dann wird

$$I = \operatorname{arctg} \frac{-1}{w}$$

oder

$$I = \operatorname{arctg} w + \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Sei weiter J das unbestimmte Integral

$$J = \int \frac{(1-c) + cx}{\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}} dx.$$

Dann findet man für J folgenden Ausdruck:

$$J = \sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1 - c + 2cx + 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}}{1 - c + 2cx - 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

Wollen wir nun den Index 1 bei α im zweiten Falle fallen lassen, indem wir unter α immer den Cosinus des *entsprechenden* Emergenzwinkels verstehen wollen, dann ergibt sich aus den Formeln (37), (38), (39) und (40):
Im I Falle:

$$\Delta = \frac{1}{2} r_0 \left[(I)_{x=1} - (I)_{x=x_1} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

und

$$T = \frac{1}{2} n_0 r_0 \left[(J)_{x=1} - (J)_{x=x_1} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Im II Falle:

$$\Delta_1 = r_0 \left[(I)_{x=1} - (I)_{x=x_m} \right] - \frac{1}{2} r_0 \left[(I)_{x=1} - (I)_{x=x_1} \right] \ldots\ldots (46)$$

und

$$T_1 = n_0 r_0 \left[(J)_{x=1} - (J)_{x=x_m} \right] - \frac{1}{2} n_0 r_0 \left[(J)_{x=1} - (J)_{x=x_1} \right] \ldots (47)$$

Es sei nun, für $x=1$, $w=w_0$ und, für $x=x_1$, $w=w_1$ und setzen wir zur Vereinfachung ($\alpha = \cos^2 e$)

$$R = + \sqrt{cx_1^2 + (1-c)x_1 - \cos^2 e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Dann wird

$$w_0 = \frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha^2 - (1-c)} = \frac{\sin 2e}{\cos 2e + c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

und

$$w_1 = \frac{2 \cos e \cdot R}{2 \cos^2 e - (1-c)x_1}$$

oder

$$w_1 = \frac{2 \cos e \cdot R}{\cos^2 e + cx_1^2 - R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

Für $x = x_m$ wird, wie wir wissen, der Wurzelausdruck

$$\sqrt{cx^2 + (1-c)x - \alpha^2} = 0.$$

Es ergibt sich also, wenn wir noch folgende vereinfachende Bezeichnungen einführen:

$$\beta = \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

und

$$\beta_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1-c+2cx_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

$$(I)_{x=1} = \operatorname{arctg} w_0 + \frac{\pi}{2}$$

$$(I)_{x=x_1} = \operatorname{arctg} w_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$(I)_{x=x_m} = \frac{\pi}{2}$$

$$(J)_{x=1} = \sin e + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1+\beta \sin e}{1-\beta \sin e}$$

$$(J)_{x=x_1} = R + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1+\beta_1 R}{1-\beta_1 R}$$

$$(J)_{x=x_m} = 0.$$

Bringen wir nun diese Ausdrücke in die früheren Formeln (44), (45), (46) und (47) ein und ersetzen $\frac{\Delta}{r_0}$ und $\frac{\Delta_1}{r_0}$ resp. durch ϑ und ϑ_1, so wird:

Im I Falle:

$$2\vartheta = \operatorname{arctg} w_0 - \operatorname{arctg} w_1 = \operatorname{arctg} \frac{w_0 - w_1}{1 + w_0 w_1} \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

$$T = \frac{1}{2} n_0 r_0 \left[\sin e - R + \frac{1}{4} \frac{1-c}{\sqrt{c}} \left\{ \lg \frac{1+\beta \sin e}{1-\beta \sin e} - \lg \frac{1+\beta_1 R}{1-\beta_1 R} \right\} \right] \ldots (54)$$

Im II Falle:

$$2\vartheta_1 = \operatorname{arctg} w_0 + \operatorname{arctg} w_1 = \operatorname{arctg} \frac{w_0 + w_1}{1 - w_0 w_1} \quad \ldots\ldots\ldots (55)$$

$$T_1 = n_0 r_0 \left[\sin e + \frac{1}{4} \frac{1-c}{\sqrt{c}} \lg \frac{1+\beta \sin e}{1-\beta \sin e} \right]$$

$$- \frac{1}{2} n_0 r_0 \left[\sin e - R + \frac{1}{4} \frac{1-c}{\sqrt{c}} \left\{ \lg \frac{1+\beta \sin e}{1-\beta \sin e} - \lg \frac{1+\beta_1 R}{1-\beta_1 R} \right\} \right]$$

oder

$$T_1 = \frac{1}{2} n_0 r_0 \left[\sin e + R + \frac{1}{4} \frac{1-c}{\sqrt{c}} \left\{ \lg \frac{1+\beta \sin e}{1-\beta \sin e} - \lg \frac{1-\beta_1 R}{1+\beta_1 R} \right\} \right] \ldots (56)$$

Vergleicht man nun die Formeln (53) und (55), so wie die Formeln (54) und (56) mit einander, so ersieht man, dass die für den zweiten Fall aus denjenigen für den ersten sich unmittelbar ergeben, wenn in ihnen R durch $-R$ ersetzt wird (siehe auch die Formel (50)).

Wir brauchen also im Folgenden diese beiden Fälle gar nicht mehr zu unterscheiden und können also nur die Formeln (53) und (54) benutzen.

Man muss nur darauf Acht geben, dass bis zur kritischen Epizentralentfernung $\Delta = \Delta_m$ oder $\vartheta = \vartheta_m$, wo der Herd im tiefsten Punkt der Strahlenbahn liegt und wo $R = 0$ wird, in diesen Formeln R das Vorzeichen $+$ und für grössere Epizentralentfernungen das Vorzeichen $-$ beigelegt werden muss.

Bezeichnen wir den Wert des Emergenzwinkels für diese kritische Epizentralentfernung durch e_m, so ergibt sich aus der Formel (48), da in diesem Fall $R = 0$ wird,

$$\cos^2 e_m = x_1 [1 - c(1 - x_1)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Die entsprechende kritische Epizentralentfernung ϑ_m erhält man aus der Formel (53), in welcher nach der Gleichung (50) $w_1 = 0$ gesetzt werden muss.

Es wird

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_m = w_0 = \frac{\sin 2e_m}{\cos 2e_m + c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$c = \frac{\sin 2(e_m - \vartheta_m)}{\sin 2\vartheta_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Wir sehen also, dass aus der Formel (59) die Konstante c sich sehr leicht berechnen lässt, wenn die kritische Epizentralentfernung ϑ_m und der zugehörige Emergenzwinkel e_m bekannt sind.

Wenn nun c bekannt ist, so kann man aus der Formel (57) x_1, also auch die Herdtiefe h, bestimmen.

Eliminiert man e_m aus den Gleichungen (57) und (58), so lässt sich etwa $\sin^2 \vartheta_m$ leicht durch c und x_1 ausdrücken.

Aus der Formel (58) ergibt sich

$$\frac{4 \sin^2 \vartheta_m (1 - \sin^2 \vartheta_m)}{[1 - 2 \sin^2 \vartheta_m]^2} = w_0^2$$

oder

$$\sin^4 \vartheta_m - \sin^2 \vartheta_m + \frac{w_0^2}{4(1 + w_0^2)} = 0.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung folgt

$$\sin^2 \vartheta_m = \frac{1}{2}\left[1 \mp \frac{1}{\sqrt{1 + w_0^2}}\right].$$

Nun ist

$$1 + w_0^2 = 1 + \frac{\sin^2 2e_m}{\cos^2 2e_m + 2c \cos 2e_m + c^2} = \frac{1 + 2c \cos 2e_m + c^2}{[\cos 2e_m + c]^2} \quad \ldots . (60)$$

Andererseits ist nach der Formel (57)

$$\cos 2e_m = 2 \cos^2 e_m - 1 = 2x_1 - 2cx_1 + 2cx_1^2 - 1.$$

Bringen wir nun diesen Ausdruck in die Formel (60) ein, so wird

$$1 + w_0^2 = \frac{1 + 4cx_1 - 4c^2 x_1 + 4c^2 x_1^2 - 2c + c^2}{[2x_1 - 2cx_1 + 2cx_1^2 - 1 + c]^2}$$

$$= \frac{[(1 - c) + 2cx_1]^2}{[2x_1 - 2cx_1 + 2cx_1^2 - 1 + c]^2}.$$

Folglich wird

$$\sin^2 \vartheta_m = \frac{1}{2}\left[1 \mp \frac{2x_1 - 2cx_1 + 2cx_1^2 - 1 + c}{1 - c + 2cx_1}\right].$$

In dieser Formel muss man das Vorzeichen (—) wählen, denn wenn x_1 sich unendlich wenig von 1 unterscheidet, wird ϑ_m fast gleich Null.

Daraus ergibt sich nach passenden Reduktionen

$$\sin^2 \vartheta_m = \frac{(1 - x_1)[1 - c(1 - x_1)]}{1 - c + 2cx_1} \quad \ldots . (61)$$

Wir werden weiter sehen, dass für $\vartheta = \vartheta_m$ der Emergenzwinkel durch ein Minimum hindurchgeht, also cos e Maximum wird. Dieser Punkt entspricht einem Inflexionspunkte der zugehörigen Laufzeitkurve.

Eliminiert man nun e aus den Formeln (53) und (54), so erhält man die Laufzeit T als Funktion von Δ und der drei Konstanten n_0, c und x_1 oder der Herdtiefe h:

$$T = F(\Delta, n_0, c, h) \quad \ldots . (62)$$

Wir sehen also, dass die Form der Laufzeitkurve nicht nur von c abhängig ist, also von der Zunahme von v mit der Tiefe, sondern auch von der Tiefe des Herdes h. Streng genommen entspricht jedem Beben eine besondere Laufzeitkurve, die von der Herdtiefe abhängig ist. Für kleine Epizentralentfernungen macht sich der Einfluss der Herdtiefe mehr geltend

und muss unbedingt in Betracht gezogen werden. Es ist infolgedessen völlig aussichtslos, nach einer allgemein geltenden Laufzeitkurve für kleine Epizentralentfernungen zu suchen.

Wenn die Laufzeitkurve, die einer bestimmten Herdtiefe h zugeordnet ist, bekannt ist, so lässt sich aus ihr der jeder Epizentralentfernung Δ zugehörige Emergenzwinkel e ermitteln.

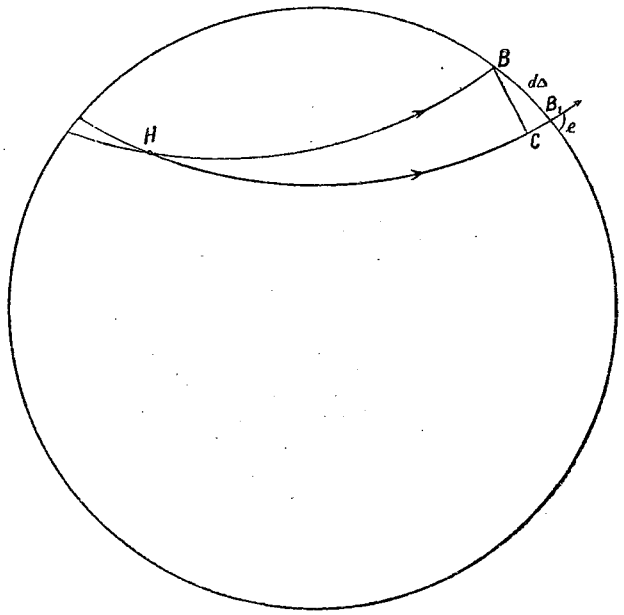
Es besteht nämlich die sehr einfache bekannte Beziehung:

$$\cos e = v_0 \frac{dT}{d\Delta} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

Diese Formel lässt sich bekanntlich geometrisch und analytisch sehr leicht beweisen.

Auf der folgenden Fig. 4 sei H der Bebenherd und B und B_1 zwei unendlich nahe liegende Beobachtungsorte in der Entfernung $d\Delta$ von einander.

Fig. 4.



Die Differenz der Laufzeiten sei dT.

Dann ergibt sich aus dem Dreieck BB_1C

$$CB_1 = v_0 dT = d\Delta \cdot \cos e$$

oder

$$\cos e = v_0 \frac{dT}{d\Delta}.$$

Die zu benutzende Laufzeitkurve muss unbedingt der entsprechenden Herdtiefe zugeordnet sein.

Dieselbe Formel lässt sich aus den allgemeinen Integralformeln für Δ und T (Formeln (21) und (22)), resp. Δ_1 und T_1 (Formeln (25) und (26)) gewinnen.

Wollen wir beide Fälle getrennt betrachten.

In den Ausdrücken für Δ und T kann α als ein variabler Parameter angesehen werden.

Bilden wir nun den Ausdruck für $T - n_0 \alpha \Delta$ und differentiieren denselben nach α. Da die Grenzen der beiden Integrale 1 und ρ_1 *unabhängig von* α sind, so folgt

$$\frac{dT}{d\alpha} - n_0 \Delta - n_0 \alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} = n_0 r_0 \frac{d}{d\alpha}\left[\int_{\rho_1}^{1} \frac{\nu^2 \rho^2 \, d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} - \int_{\rho_1}^{1} \frac{\alpha^2 \, d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}}\right]$$

$$= n_0 r_0 \frac{d}{d\alpha} \int_{\rho_1}^{1} \frac{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}}{\rho} \cdot d\rho$$

$$= - n_0 r_0 \int_{\rho_1}^{1} \frac{\alpha}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}} d\rho = - n_0 \Delta.$$

Also

$$\frac{dT}{d\alpha} - n_0 \alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} = 0$$

oder

$$\cos e = v_0 \frac{dT}{d\Delta}.$$

Wenden wir uns nun dem zweiten Fall zu.

In den Formeln (25) und (26) ist jetzt die untere Grenze der beiden ersten Integrale ρ_m schon eine Funktion von α_1.

Es ergibt sich also

$$\frac{dT_1}{d\alpha_1} - n_0 \Delta_1 - n_0 \alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha_1} = 2 n_0 r_0 \frac{d}{d\alpha_1} \int_{\rho_m}^{1} \frac{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}}{\rho} d\rho - n_0 r_0 \frac{d}{d\alpha_1} \int_{\rho_1}^{1} \frac{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}}{\rho} d\rho$$

$$= 2 n_0 r_0 \left[- \int_{\rho_m}^{1} \frac{\alpha_1 \, d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} - \left\{ \frac{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}}{\rho} \right\}_{\rho = \rho_m} \cdot \frac{d\rho_m}{d\alpha_1} \right] + n_0 r_0 \int_{\rho_1}^{1} \frac{\alpha_1}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} d\rho.$$

Da nun $\frac{d\rho_m}{d\alpha_1}$ endlich ist und der Ausdruck $\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}$ für $\rho = \rho_m$, wie wir

schon wissen, gleich Null wird, so wird einfach

$$\frac{dT_1}{d\alpha_1} - n_0 \Delta_1 - n_0 \alpha_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} = - n_0 \left[2 r_0 \alpha_1 \int_{\rho m}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} - r_0 \alpha_1 \int_{\rho_1}^{1} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} \right]$$

$$= - n_0 \Delta_1,$$

also

$$\alpha_1 = \cos e_1 = v_0 \frac{dT_1}{d\Delta_1}.$$

Die Richtigkeit der Formel (63) ist also bewiesen.

Wenden wir uns jetzt der Gleichung (53) zu und wollen wir nun den Ausdruck für den Emergenzwinkel e aufsuchen, als Funktion von c und der Grösse x_1, welche die Herdtiefe charakterisiert.

Man erhält nun aus (53) auf Grund der Beziehungen (49) und (50)

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{w_0 - w_1}{1 + w_0 w_1} = \frac{\dfrac{\sin 2e}{\cos 2e + c} - \dfrac{2 \cos e \,.\, R}{\cos^2 e + c x_1^2 - R^2}}{1 + \dfrac{\sin 2e}{\cos 2e + c} \cdot \dfrac{2 \cos e \,.\, R}{\cos^2 e + c x_1^2 - R^2}}$$

$$= \frac{\sin 2e \,.\, \{\cos^2 e + c x_1^2\} - \sin 2e \,.\, R^2 - 2 \cos e \,\{\cos 2e + c\}\, R}{\{\cos 2e + c\}\,\{\cos^2 e + c x_1^2\} - R^2 \{\cos 2e + c\} + 2 \sin 2e \,.\, \cos e \,.\, R}$$

oder

$$[\{\cos 2e + c\} \operatorname{tg} 2\vartheta - \sin 2e] R^2 - 2 \cos e \,[\sin 2e \,.\, \operatorname{tg} 2\vartheta + \cos 2e + c] R$$

$$= \{\cos^2 e + c x_1^2\} [\{\cos 2e + c\} \operatorname{tg} 2\vartheta - \sin 2e].$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $\cos 2e \,.\, \operatorname{tg} 2\vartheta + c \operatorname{tg} 2\vartheta - \sin 2e$; dann folgt

$$R^2 - 2 \cos e \cdot \frac{\sin 2e \cdot \dfrac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} + \cos 2e + c}{\cos 2e \cdot \dfrac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} - \sin 2e + c \dfrac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta}} \cdot R = \cos^2 e + c x_1^2$$

oder

$$R^2 - 2 \cos e \cdot \frac{\cos 2(e - \vartheta) + c \cos 2\vartheta}{-[\sin 2(e - \vartheta) - c \sin 2\vartheta]} \cdot R - \{\cos^2 e + c x_1^2\} = 0.$$

Setzen wir nun

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin 2(e - \vartheta) - c \sin 2\vartheta}{\cos 2(e - \vartheta) + c \cos 2\vartheta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

dann muss R die Wurzel der folgenden quadratischen Gleichung sein:

$$R^2 + 2 \frac{\cos e}{\operatorname{tg} \psi} \cdot R - \{\cos^2 e + c x_1^2\} = 0.$$

Also

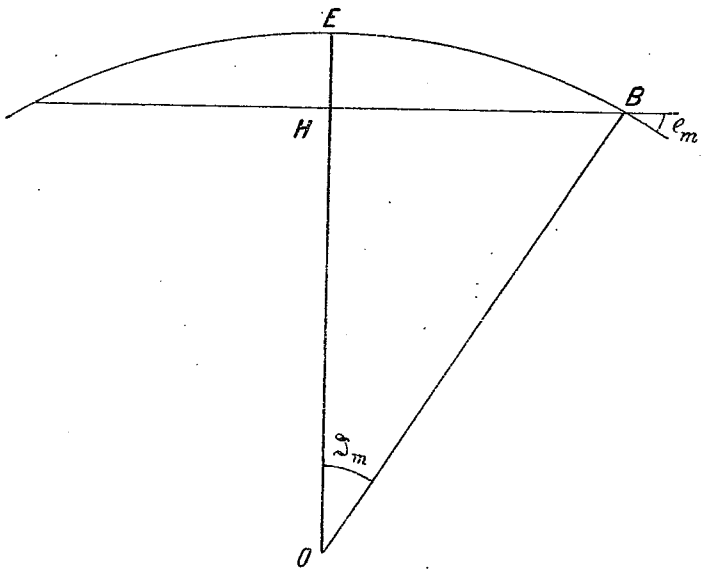
$$R = -\frac{\cos e}{\operatorname{tg}\psi} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 e}{\operatorname{tg}^2\psi} + \cos^2 e + cx_1^2}$$

$$= -\frac{\cos e}{\operatorname{tg}\psi} \pm \frac{1}{\sin\psi} \cdot \sqrt{\cos^2 e + cx_1^2 \sin^2\psi}.$$

Es ist nicht schwer einzusehen, dass hier das Vorzeichen + genommen werden muss.

In der Tat setzen wir den Spezialfall voraus, dass $c = 0$ ist. Dann werden die Strahlen gradlinig sein und in der Nähe der kritischen Epizentralentfernung wird e_m fast gleich ϑ_m sein, wie dies aus der folgenden Fig. 5 leicht ersichtlich ist.

Fig. 5.



Dann wird $\sin\psi$ sich recht wenig von $\operatorname{tg}\psi$ unterscheiden.

Da aber für die kritische Epizentralentfernung R bekanntlich verschwinden soll, so muss in der vorigen Gleichung vor dem Wurzelzeichen das Vorzeichen + stehen.

Wir erhalten also

$$R\sin\psi = -\cos e\cos\psi + \sqrt{\cos^2 e + cx_1^2\sin^2\psi}.$$

Erheben wir diese Gleichung ins Quadrat und ersetzen dabei R^2 durch seinen Wert aus der Formel (48).

Dann ergibt sich

$$[cx_1^2 + (1-c)x_1 - \cos^2 e]\sin^2\psi = \cos^2 e\cos^2\psi$$

$$+ \cos^2 e + cx_1^2\sin^2\psi - 2\cos e\cos\psi\sqrt{\cos^2 e + cx_1^2\sin^2\psi}$$

oder

$$2\cos e\cos\psi\sqrt{\cos^2 e + cx_1^2\sin^2\psi} = 2\cos^2 e + \sin^2\psi . x_1(c-1).$$

Quadrieren wir diese Gleichung noch einmal.

Dann folgt

$$4\cos^4 e\cos^2\psi + 4cx_1^2\cos^2 e\cos^2\psi\sin^2\psi = 4\cos^4 e$$
$$+ \sin^4\psi . x_1^2(c-1)^2 + 4\cos^2 e\sin^2\psi . x_1(c-1)$$

oder

$$4cx_1^2\cos^2 e\cos^2\psi = 4\cos^4 e + (1-\cos^2\psi)\,x_1^2(c-1)^2 + 4\cos^2 e . x_1(c-1),$$

oder noch

$$x_1^2[c^2-2c+1+4c\cos^2 e]\cos^2\psi = 4\cos^4 e + 4x_1\cos^2 e(c-1) + x_1^2(c-1)^2$$
$$= [2\cos^2 e + x_1(c-1)]^2.$$

Also

$$\cos^2\psi = \frac{[2\cos^2 e + x_1(c-1)]^2}{x_1^2[1+c^2+2c\cos 2e]}.$$

Ein anderer Ausdruck für $\cos^2\psi$ ergibt sich aus der Formel (64).

Es wird nämlich

$$\cos^2\psi = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\psi} = \frac{[\cos 2(e-\vartheta)+c\cos 2\vartheta]^2}{1+c^2+2c\{\cos 2\vartheta . \cos 2(e-\vartheta) - \sin 2\vartheta . \sin 2(e-\vartheta)\}}$$
$$= \frac{[\cos 2(e-\vartheta)+c\cos 2\vartheta]^2}{1+c^2+2c\cos 2e}.$$

Vergleichen wir diese beiden Ausdrücke für $\cos^2\psi$ mit einander, so hebt sich der Ausdruck $1+c^2+2c\cos 2e$ im Nenner weg und es lässt sich die Quadratwurzel sofort ausziehen.

Es ergibt sich also

$$\frac{1}{x_1}[2\cos^2 e + x_1(c-1)] = \cos 2(e-\vartheta) + c\cos 2\vartheta$$
$$= 2\cos^2(e-\vartheta) - 1 + c\cos 2\vartheta$$

oder

$$\frac{1}{x_1}\cos^2 e = \cos^2(e-\vartheta) - c\sin^2\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Diese sehr einfache Gleichung stellt die Beziehung zwischen den Grössen ϑ, e, c und x_1 dar.

Aus dieser Gleichung lässt sich nun $\cos^2 e$ berechnen.

Es wird nämlich

$$\frac{1}{x_1}\cos^2 e = \cos^2 e \cos^2 \vartheta + \sin^2 e \sin^2 \vartheta + 2 \sin e \cos e \sin \vartheta \cos \vartheta - c \sin^2 \vartheta$$

$$= \cos^2 e \cos 2\vartheta + (1 - c) \sin^2 \vartheta + \cos e \sqrt{1 - \cos^2 e}\,. \sin 2\vartheta$$

oder

$$\cos e \sqrt{1 - \cos^2 e}\,. \sin 2\vartheta = \cos^2 e \left[\frac{1}{x_1} - \cos 2\vartheta\right] - (1 - c) \sin^2 \vartheta.$$

Quadrieren wir diese Gleichung, dann bekommen wir:

$$\cos^2 e \sin^2 2\vartheta - \cos^4 e \sin^2 2\vartheta = \cos^4 e \left[\frac{1}{x_1^2} - \frac{2}{x_1} \cos 2\vartheta + \cos^2 2\vartheta\right]$$

$$- 2 (1 - c) \sin^2 \vartheta \left[\frac{1}{x_1} - \cos 2\vartheta\right] \cos^2 e + (1 - c)^2 \sin^4 \vartheta$$

oder anders geordnet

$$\cos^4 e \left[\frac{1}{x_1^2} - \frac{2}{x_1} \cos 2\vartheta + 1\right]$$

$$- 2 \sin^2 \vartheta \left[(1 - c) \left\{\frac{1}{x_1} - \cos 2\vartheta\right\} + 2 \cos^2 \vartheta\right] \cos^2 e + (1 - c)^2 \sin^4 \vartheta = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $\sin^4 \vartheta$ und setzen zur Vereinfachung

$$\frac{\cos^2 e}{x_1 \sin^2 \vartheta} = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Dann kann man schreiben

$$[1 - 2x_1 \cos 2\vartheta + x_1^2] z^2 - 2 [(1 - c) - (1 - c) x_1 \{2 \cos^2 \vartheta - 1\}$$

$$+ 2x_1 \cos^2 \vartheta] z + (1 - c)^2 = 0$$

oder

$$[1 - 2x_1 (1 - 2 \sin^2 \vartheta) + x_1^2] z^2 - 2[(1 - c)(1 + x_1)$$

$$+ 2cx_1 (1 - \sin^2 \vartheta)] z + (1 - c)^2 = 0$$

oder noch

$$[(1 - x_1)^2 + 4x_1 \sin^2 \vartheta] z^2 - 2 [(1 + x_1) - c (1 - x_1 + 2x_1 \sin^2 \vartheta)] z + (1 - c)^2 = 0.$$

z ergibt sich also als die Wurzel dieser quadratischen Gleichung.

$$z = \frac{1}{(1 - x_1)^2 + 4x_1 \sin^2 \vartheta} \cdot \left[\{(1 + x_1) - c (1 - x_1 + 2x_1 \sin^2 \vartheta\}\right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\{(1 + x_1) - c (1 - x_1 + 2x_1 \sin^2 \vartheta)\}^2 - (1 - c)^2 \{(1 - x_1)^2 + 4x_1 \sin^2 \vartheta\}}\right]$$

oder nach passenden Reduktionen des Wurzelausdruckes

$$z = \frac{1}{(1-x_1)^2 + 4x_1 \sin^2 \vartheta}\left[\{(1+x_1) - c(1-x_1+2x_1\sin^2\vartheta\} \right.$$
$$\left. \mp 2\sqrt{x_1}\cos\vartheta\sqrt{1-c(1-x_1)-c^2x_1\sin^2\vartheta}\right] \ldots\ldots(67)$$

Es muss hier vor dem Wurzelzeichen das Vorzeichen + genommen werden. Den Beweis dafür werden wir etwas später anführen.

Wollen wir der Einfachheit halber folgende Bezeichnungen einführen:

$$F = \frac{1}{4 + \frac{(1-x_1)^2}{x_1 \sin^2\vartheta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(68)$$

$$B = 1 + x_1 - c(1 - x_1 + 2x_1\sin^2\vartheta) \ldots\ldots\ldots\ldots(69)$$

und

$$P = + \sqrt{1-c(1-x_1)-c^2x_1\sin^2\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(70)$$

Dann folgt aus den Beziehungen (66) und (67)

$$\cos^2 e = F.[B + 2\sqrt{x_1}\cos\vartheta.P] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(71)$$

Diese Formel gibt also die Möglichkeit, wenn die Konstante c bekannt ist und die Herdtiefe h, folglich auch $x_1 = \left(1 - \frac{h}{r_0}\right)^2$ gegeben ist, für jede Epizentralentfernung, in Bogenmaass ausgedrückt, den entsprechenden Emergenzwinkel e zu berechnen.

Für kleine Emergenzwinkel wird man lieber, statt der Formel (71), bei wirklichen Ausrechnungen die folgende Formel benutzen:

$$\sin^2 e = 1 - F.[B + 2\sqrt{x_1}\cos\vartheta.P] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(72)$$

Wenn der einem gegebenen ϑ zugehörige Emergenzwinkel e bekannt ist, so kann man ihn schon in die Formel (54) einsetzen und die entsprechende Laufzeit T, vom Anfang der Bewegung im Herde an gerechnet, bestimmen.

Den Wert von R entnimmt man aus der Gleichung (48), wobei zu beachten ist, dass R, wenn ϑ kleiner als die kritische Epizentralentfernung ϑ_m ist, als positive Grösse auftritt; wenn aber $\vartheta > \vartheta_m$ wird, so muss vor R das negative Vorzeichen gewählt werden.

Man erhält auf diese Weise die theoretische Laufzeitkurve, welche der gegebenen Herdtiefe h zugeordnet ist.

Die kritische Epizentralentfernung ϑ_m und der entsprechende Emergenzwinkel e_m ergeben sich aus den früher angeführten Formeln (61) und (57).

$$\sin^2 \vartheta_m = \frac{(1-x_1)[1-c(1-x_1)]}{1-c+2cx_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

$$\cos^2 e_m = x_1 [1-c(1-x_1)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Die Formeln (68), (69), (70) und (71) zeigen, dass B und P endlich bleiben, wenn $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = 180°$ ist, während $F = 0$ wird.

Folglich wird in beiden Fällen $e = 90°$, wie es auch sein muss.

Wenn ϑ von 0 an wächst, so nimmt e ab und für ein bestimmtes ϑ geht e durch ein Minimum, also $\cos^2 e$ durch ein Maximum hindurch.

In diesem Fall wird

$$\frac{d\cos^2 e}{d\vartheta} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

Bildet man diesen Ausdruck aus und führt den Wert von ϑ_m aus der Formel (61) ein, so wird derselbe identisch gleich Null. Man kann also die Richtigkeit beider Formeln (61) und (57) auch aus der allgemeinen Gleichung (71) verifizieren, da aber die entsprechenden Rechnungen ziemlich weitläufig sind, so werde ich sie hier unterlassen.

Die Formel (61) zeigt, dass mit der Abnahme von h, wenn also x_1 sich der Einheit nähert, der kritische Punkt, wo e Minimum wird, dem Epizentrum näher rückt.

Aus der Gleichung (73) ergibt sich noch, dass für die kritische Epizentralentfernung

$$\frac{d\cos e}{d\Delta} = 0,$$

also nach der Formel (63)

$$\frac{d^2 T}{d\Delta^2} = 0$$

wird.

An der entsprechenden Stelle hat also die Laufzeitkurve einen *Inflexionspunkt.*

Wollen wir nun die Gleichungen (61), (57), (71) und (54) auf den hypothetischen Spezialfall anwenden, dass $c=0$ ist, dass also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Strahlen v unverändert bleibt.

Es ergibt sich dann aus (61) und (57)

$$\sin^2 \vartheta_m = 1 - x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

$$\cos^2 e_m = x_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

also

$$\vartheta_m = e_m.$$

Weiter ergibt sich

$$F = \frac{x_1 \sin^2 \vartheta}{4x_1(1-\cos^2\vartheta)+(1-x_1)^2} = \frac{x_1 \sin^2 \vartheta}{(1+x_1)^2 - 4x_1\cos^2\vartheta}$$

oder

$$F = \frac{x_1 \sin^2 \vartheta}{\{1+x_1+2\sqrt{x_1}\cos\vartheta\}\{1+x_1-2\sqrt{x_1}\cos\vartheta\}},$$

$$B = 1+x_1$$

und

$$P = +1,$$

also

$$\cos^2 e = \frac{x_1 \sin^2 \vartheta}{1+x_1-2\sqrt{x_1}\cos\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

Würden wir in der Gleichung (67) das Vorzeichen (—) vor der Wurzel wählen, so würde sich ergeben

$$\cos^2 e = \frac{x_1 \sin^2 \vartheta}{1+x_1+2\sqrt{x_1}\cos\vartheta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

was, wie wir gleich sehen werden, nicht zulässig ist.

Wenden wir uns jetzt der Gleichung (54) zu.

Wir wollen in ihr zunächst c als sehr klein annehmen und alsdann schon zur Grenze übergehen. Wir werden also nur die Glieder von der Ordnung $\sqrt{c}$ behalten.

Dann wird (siehe noch die Beziehungen (51) und (52))

$$T = \frac{1}{2} n_0 r_0 \left[\sin e - R + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\{4\sqrt{c}.\sin e - 4\sqrt{c}.R\}\right]$$

oder

$$T = n_0 r_0 [\sin e - R], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

wo nach der Formel (48)

$$R = \sqrt{x_1 - \cos^2 e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

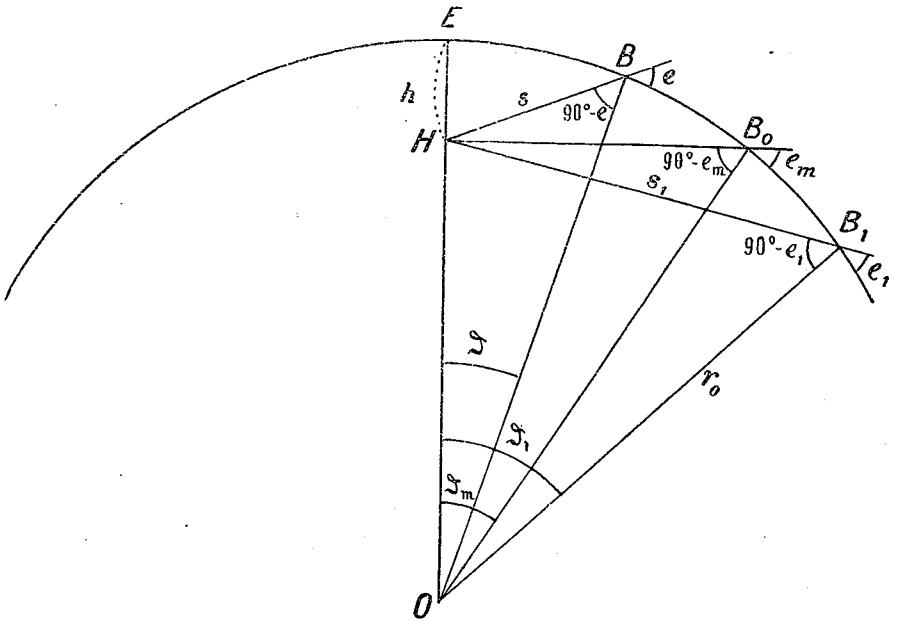
wird.

Wenn $\vartheta > \vartheta_m$ wird, so muss in der Formel (78), statt R, $-R$ gesetzt werden.

Alle diese Formeln, die sich aus unseren allgemeinen Gleichungen folgern liessen, kann man für den Fall $c = 0$ unmittelbar ableiten.

Dazu wollen wir die folgende Fig. 6 benutzen, wo die seismischen Strahlen schon gradlinig sich ausbreiten, und wiederum die beiden Fälle $\vartheta < \vartheta_m$ und $\vartheta > \vartheta_m$ unterscheiden.

Fig. 6.



Aus dem Dreieck HB_0O ergibt sich erstens

$$OH = r_0\left(1 - \frac{h}{r_0}\right) = r_0 \cos e_m = r_0 \cos \vartheta_m,$$

also, da nach den Beziehungen (29) und (30)

$$1 - \frac{h}{r_0} = \sqrt{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots (80)$$

ist,

$$\cos^2 e_m = x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

und

$$\sin^2 \vartheta_m = 1 - x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

im Einklang mit den Formeln (75) und (74).

Weiter folgt aus dem Dreieck OHB ($\vartheta < \vartheta_m$)

$$s \sin e + (r_0 - h) \cos \vartheta = r_0$$

und

$$s \cos e = (r_0 - h) \sin \vartheta.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich $\cos^2 e$ als Funktion von ϑ und s als Funktion von e ausdrücken.

Es wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{r_0}\sin e &= 1 - \sqrt{x_1}\cos\vartheta \\ \frac{s}{r_0}\cos e &= \sqrt{x_1}\sin\vartheta \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

also

$$\operatorname{tg}^2 e = \frac{[1 - \sqrt{x_1}\cos\vartheta]^2}{x_1 \sin^2\vartheta}.$$

Daraus folgt

$$\cos^2 e = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 e} = \frac{x_1 \sin^2\vartheta}{1 - 2\sqrt{x_1}\cos\vartheta + x_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (84)$$

eine Formel, welche mit (76) identisch ist.

Wir sehen also, dass nicht etwa die Formel (77), sondern (76), richtig ist. Dies beweist also, dass wir in der Tat in der Gleichung (67) das Vorzeichen + vor der Wurzel nehmen mussten.

Weiter ergibt sich aus den Gleichungen (83)

$$\sqrt{x_1}\cos\vartheta = 1 - \frac{s}{r_0}\sin e$$

$$\sqrt{x_1}\sin\vartheta = \frac{s}{r_0}\cos e,$$

also

$$x_1 = 1 - 2\frac{s}{r_0}\sin e + \left(\frac{s}{r_0}\right)^2$$

oder

$$\left(\frac{s}{r_0}\right)^2 - 2\sin e\left(\frac{s}{r_0}\right) + (1 - x_1) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{s}{r_0} = \sin e \mp \sqrt{x_1 - \cos^2 e}.$$

Für $e = 90°$ wird $s = h$, also

$$\left(\frac{s}{r_0} - \sin e\right) = \left(\frac{h}{r_0} - 1\right) = -\sqrt{x_1}.$$

Wir müssen also in der vorigen Gleichung das Vorzeichen (—) wählen und es wird

$$s = r_0\{\sin e - \sqrt{x_1 - \cos^2 e}\}$$

oder nach der Beziehung (79)

$$s = r_0[\sin e - R],$$

also

$$T = \frac{s}{v_0} = n_0 r_0 [\sin e - R],$$

was mit der Formel (78) identisch ist.

Dieselben Rechnungen lassen sich auch für das Dreieck $HB_1 O$ anstellen ($\vartheta > \vartheta_m$).

Man bekommt in diesem Falle

$$s_1 \sin e_1 + (r_0 - h) \cos \vartheta_1 = r_0$$

und

$$s_1 \cos e_1 = (r_0 - h) \sin \vartheta_1 .$$

Daraus folgt, wie früher,

$$\cos^2 e_1 = \frac{x_1 \sin^2 \vartheta_1}{1 - 2\sqrt{x_1} \cos \vartheta_1 + x_1}.$$

Folglich ist die früher abgeleitete Formel (76) für beide Fälle $\vartheta < \vartheta_m$ und $\vartheta > \vartheta_m$ gültig.

Was nun s_1 anbelangt, so findet man, wie früher,

$$\frac{s_1}{r_0} = \sin e_1 \pm \sqrt{x_1 - \cos^2 e_1}.$$

In diesem Fall muss, da $\vartheta > \vartheta_m$ ist, für

$$e_1 = 90^\circ$$

$$s_1 = r_0 + (r_0 - h)$$

sein, also

$$\frac{s_1}{r_0} = 1 + \sqrt{x_1} = 1 \pm \sqrt{x_1}.$$

Es muss also jetzt das Vorzeichen + genommen werden und es wird

$$s_1 = r_0 [\sin e_1 + \sqrt{x_1 - \cos^2 e_1}]$$

und

$$T_1 = n_0 r_0 [\sin e_1 + \sqrt{x_1 - \cos^2 e_1}].$$

Wir sehen also, dass die Formel (78) auch allgemein gültig ist.

Es muss nur in ihr, wenn $\vartheta > \vartheta_m$ wird, $-R$, statt R, gesetzt werden.

Wir haben also die Richtigkeit unserer Formeln für den Spezialfall $c = 0$ direkt geprüft.

Dieser Fall hat jedoch keine praktische Bedeutung, da erfahrungsgemäss v in den oberen Erdschichten nicht konstant bleibt und c, wie wir weiter sehen werden, keinesweges eine sehr kleine Grösse ist.

Wollen wir nun unsere allgemeinen Formeln auf einen anderen Spezialfall anwenden.

Es soll nämlich c von Null verschieden, h aber recht klein sein. Wir wollen also in unseren Formeln einfach $x_1 = 1$ setzen.

h ist streng genommen nie gleich Null, für grössere Epizentralentfernungen aber kann man es doch vernachlässigen. Somit wird dieser Fall gewissermaassen der Wirklichkeit entsprechen.

Wollen wir für diese Annahme den Ausdruck für $\cos^2 e$ und T aufsuchen, aber wir dürfen nicht mehr in den abzuleitenden Formeln $\vartheta = 0$ setzen, dagegen der Fall $\vartheta = 180°$ ist noch zulässig.

Aus den Gleichungen (68), (69), (70) und (71) ergibt sich

$$F = \frac{1}{4},$$

$$B = 2\{1 - c\sin^2\vartheta\}$$

und

$$P = +\sqrt{1 - c^2\sin^2\vartheta},$$

also

$$\cos^2 e = \frac{1}{2}[1 - c\sin^2\vartheta + \cos\vartheta\sqrt{1 - c^2\sin^2\vartheta}] \quad \ldots\ldots\ldots (85)$$

Aus der Formel (48) folgt

$$R = \sin e,$$

folglich erhalten wir aus der Formel (54), in welcher jetzt, da ϑ immer grösser als ϑ_m wird, $-R$, statt R, gesetzt werden muss und $\beta_1 = \beta$ wird, folgenden Ausdruck für die Laufzeit T:

$$T = n_0 r_0 \left[\sin e + \frac{1}{4}\cdot\frac{1-c}{\sqrt{c}}\cdot \lg\frac{1+\beta\sin e}{1-\beta\sin e}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (86)$$

Es lassen sich noch zwei interessante Formeln gewinnen, von denen die eine den Wert von c als Funktion von ϑ und des entsprechenden Emergenzwinkels e und die andere die Tiefe h_m (resp. x_m), zu welcher ein gegebener Strahl in das Erdinnere gelangt, angibt.

Aus der Formel (85) findet man

$$[\cos 2e + c \sin^2 \vartheta]^2 = \cos^2 \vartheta - c^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta$$

$$\cos^2 2e + 2c \cos 2e \,.\, \sin^2 \vartheta + c^2 \sin^4 \vartheta = \cos^2 \vartheta - c^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \sin^4 \vartheta$$

oder

$$c^2 + 2 \cos 2e \,.\, c + \frac{\cos^2 2e - \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$c = -\cos 2e + \sqrt{\frac{\cos^2 2e\,(1 - \cos^2 \vartheta) - \cos^2 2e + \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta}}$$

$$= -\cos 2e + \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\cos^2 \vartheta\,(1 - \cos^2 2e)}$$

$$= -\cos 2e + \frac{1}{\sin \vartheta} \cos \vartheta \sin 2e$$

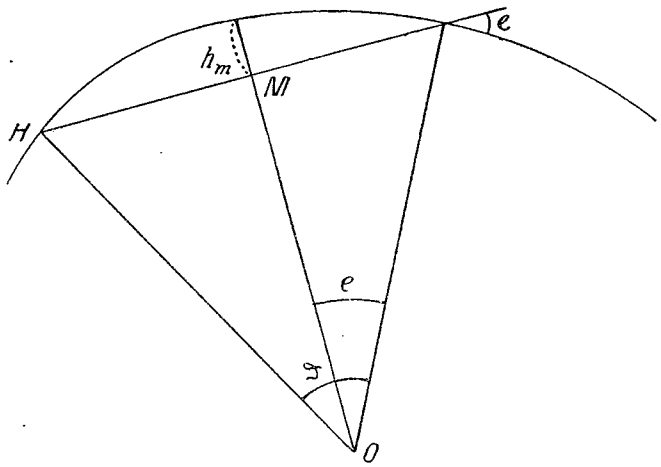
oder

$$c = \frac{\sin (2e - \vartheta)}{\sin \vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

Das ist eine sehr einfache und ziemlich elegante Formel, die, falls ϑ und e bekannt sind, den Wert von c zu berechnen gestattet.

Für den Fall $c = 0$ muss $e = \frac{\vartheta}{2}$ sein, wie es auch sein muss. Man vergleiche die folgende Fig. 7.

Fig. 7.



Um nun $x_m = \left(1 - \frac{h_m}{r_0}\right)^2$ zu berechnen, wenden wir uns den Gleichungen (32), (33) und (34) zu.

Es wird

$$c x_m^{\,2} + (1 - c)\, x_m = \cos^2 e,$$

also

$$x_m = \frac{1}{2c} \cdot [\sqrt{(1-c)^2 + 4c \cdot \cos^2 e} - (1-c)] \quad \ldots\ldots\ldots (88)$$

Es erübrigt also nur den Wert von c aus der Gleichung (87) in diese Formel einzusetzen.

Wollen wir zunächst den Wurzelausdruck ausrechnen.

$$\sqrt{1 + 2c(2\cos^2 e - 1) + c^2} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2(2e-\vartheta)}{\sin^2\vartheta} + 2\frac{\sin(2e-\vartheta)}{\sin\vartheta} \cdot \cos 2e}$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\sin^2\vartheta + \sin(2e-\vartheta)\{\sin 2e\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos 2e + 2\sin\vartheta\cos 2e\}}$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\sin^2\vartheta + \sin(2e-\vartheta)\sin(2e+\vartheta)}$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\sin^2\vartheta + \sin^2 2e\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\cos^2 2e}$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{1 - \cos^2 2e\cos^2\vartheta - \cos^2 2e\sin^2\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{1-\cos^2 2e} = \frac{\sin 2e}{\sin\vartheta}.$$

Bringt man diesen Ausdruck in die Formel (88) ein, so folgt

$$x_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\sin(2e-\vartheta)}\left[\frac{\sin 2e}{\sin\vartheta} - \left\{1 - \frac{\sin(2e-\vartheta)}{\sin\vartheta}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin(2e-\vartheta)}[\sin 2e - \sin\vartheta + \sin(2e-\vartheta)]$$

$$= \frac{1}{2\sin(2e-\vartheta)}[\sin 2e(1+\cos\vartheta) - \sin\vartheta(1+\cos 2e)]$$

$$= \frac{1}{2\sin(2e-\vartheta)}\left[2\sin 2e\cos^2\frac{\vartheta}{2} - 2\sin\vartheta\cos^2 e\right]$$

$$= \frac{2\sin e\cos e\cos^2\frac{\vartheta}{2} - 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos^2 e}{\sin 2\left(e-\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos e\cos\frac{\vartheta}{2}\left[\sin e\cos\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2}\cos e\right]}{\sin\left(e-\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(e-\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{\cos e\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\left(e-\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(e-\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(e-\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

oder endlich

$$x_m = \frac{\cos e \cdot \cos\frac{\vartheta}{2}}{\cos\left(e-\frac{\vartheta}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

Diese Formel hat gleichfalls eine sehr einfache Gestalt.

Für den Fall $c = 0$ wird, wie wir schon wissen, $e = \frac{\vartheta}{2}$ und

$$x_m = \cos^2 e,$$

wie es auch sein muss.

In der Tat ergibt sich aus der Fig. 7

$$r_0\left(1 - \frac{h_m}{r_0}\right) = r_0\sqrt{x_m} = r_0 \cos e,$$

also

$$x_m = \cos^2 e.$$

Bevor wir nun unsere allgemeinen Formeln auf konkrete Zahlenbeispiele anwenden, wollen wir noch auf folgenden Umstand aufmerksam machen.

Die Formeln (70) und (71) zeigen, dass unter Umständen, wenn der unter dem Wurzelzeichen von P stehende Ausdruck negativ ist, $\cos^2 e$ imaginär wird, mit anderen Worten, dass es keinen Emergenzwinkel gibt und die entsprechenden Strahlen aus dem Erdinneren überhaupt nicht austreten werden.

Wollen wir diesen Fall etwas näher besprechen, der Einfachheit wegen aber voraussetzen, dass der Bebenherd mit dem entsprechenden Epizentrum zusammenfällt, also $x_1 = 1$ wird. Dann müssen wir schon zu der Formel (85) greifen.

Wenn c klein ist und zwar < 1, so wird dies nie eintreten können. Es muss also, damit die seismischen Strahlen nicht austreten, $c > 1$ sein. Der Grenzwert von ϑ, wo dieses nun stattfindet, ergibt sich aus der Bedingung

$$\sin \vartheta = \frac{1}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Formel (85) ein, so folgt:

$$\cos e = \sqrt{\frac{c-1}{2c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

Wir dürfen jedoch von diesen beiden Formeln keine *direkte* Anwendung machen, denn es ist nur gestattet für eine relativ sehr dünne Schicht c als konstant zu betrachten. Wenn aber ϑ gross wird, so dringen schon die Strahlen tief in die Erde hinein und es muss schon von der Veränderlichkeit von c Rechenschaft getragen werden. Wir können aber die Erde in dünne konzentrische Schichten einteilen, für jede Schicht einen speziellen Wert von c annehmen und somit schrittweise vorgehen.

Ohne auf diese Frage näher einzugehen, lässt es sich doch aus den hier entwickelten Formeln voraussehen, dass für gewisse Epizentralentfernungen ein Austreten der seismischen Strahlen überhaupt nicht stattzufinden braucht. Es kann also für gewisse Werte von ϑ einen, so zu sagen, seismischen Schatten geben, ein Umstand, auf welchen bereits Wiechert aufmerksam gemacht hat.

Wie ist aber diese Tatsache physikalisch zu deuten?

Wir werden, um nur einen Einblick in diese Frage zu gewinnen, von der Formel (91) Gebrauch machen, obgleich sie nur für eine dünne Schicht ihre Gültigkeit behält. Diese Annahme ist gleichwertig mit der, dass das Gesetz für die Zunahme von v mit der Tiefe überall dasselbe bleibt, wie in den obersten Erdschichten.

Wollen wir nun unter dieser Annahme den Krümmungsradius R der Bahn der seismischen Strahlen in dem Punkte, wo sie die Erdoberfläche treffen, berechnen.

Nach der Formel (16) ist

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0 \nu} \cdot \frac{d\nu}{d\rho} \cdot \cos e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Auf Grund der Formeln (27), (31) und (34) ergibt sich weiter

$$\nu^2 = (1 - c) + c\rho^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \nu}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\nu} \cdot c.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Formel (16) ein und beachten, dass für die Erdoberfläche ν und ρ beide gleich 1 sind und ausserdem $\cos e$ durch die Formel (91) gegeben wird, so können wir schreiben

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \cdot c \sqrt{\frac{c-1}{2c}}$$

oder

$$\frac{R}{r_0} = \sqrt{\frac{2}{c(c-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

Diese Formel zeigt, dass, wenn c (welches > 1 sein soll) einen gewissen Wert übersteigt, $R < r_0$, also R kleiner als der Erdradius sein wird, die Strahlen also stärker als die Erdoberfläche gekrümmt werden. Der Grenzwert von c, wo dies noch stattfinden kann, ergibt sich aus der Bedingung $R = r_0$.

Also muss c die Wurzel der folgenden quadratischen Gleichung sein:

$$c^2 - c - 2 = 0.$$

Die positive Wurzel dieser Gleichung ist

$$c = 2.$$

Dann wird nach der Formel (90)

$$\sin \vartheta = \frac{1}{2},$$

also

$$\vartheta = 30^\circ \text{ und } \Delta = r_0 \vartheta = 3336 \text{ Klm.}$$

und

$$\cos e = \frac{1}{2}, \text{ also } e = 60^\circ.$$

Die Tiefe, zu welcher der entsprechende Strahl vordringt, wird durch die Formel (89) gegeben:

$$x_m = \frac{\cos 60^\circ . \cos 15^\circ}{\cos 45^\circ} = 0{,}6830.$$

Also

$$\rho_m = \frac{r_m}{r_0} = \sqrt{x_m} = 0{,}8264.$$

Da $r_0 = 6371$ Klm. beträgt, so erhält man

$$r_m = 5265 \text{ Klm.}$$

und

$$h_m = r_0 - r_m = 1106 \text{ Klm.}$$

Wenn also bis zur Tiefe von etwa 1100 Klm. c denselben Wert 2 behalten würde, so würde schon bei einer Epizentralentfernung von etwa 3340 Klm. $R = r_0$ sein.

Dieses Zahlenbeispiel hat selbstverständlich keine reelle Bedeutung; ich habe es nur deshalb angeführt, um diese Frage etwas näher zu erläutern.

Nach Darlegung der allgemeinen Theorie wollen wir sie nun auf konkrete, aus der Praxis entnommene Zahlenbeispiele anwenden.

Um einen Einblick in den Verlauf der Laufzeitkurven bei verschiede-

nen Herdtiefen zu gewinnen, wollen wir von den von Zöppritz und Geiger[1]) gegebenen Zahlenwerten Gebrauch machen und uns dabei nur auf relativ kleine Epizentralentfernungen Δ bis zu 500 Kilometer beschränken.

Zöppritz und Geiger geben auf Grund der von ihnen studierten seismischen Daten für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen seismischen Wellen in den allerobersten Erdschichten

$$v_0 = 7{,}17 \text{ klm./sec.}$$

und in einer Tiefe von 100 Klm.

$$v_{100} = 7{,}60 \text{ klm./sec.}.$$

Bringen wir diese Werte von v_0 und v_{100} in die Formel (36) ein und setzen $r_0 = 6371$ Klm., so ergibt sich

$$c = 3{,}529,$$

was sehr weit von Null verschieden ist.

Mit diesem Werte von c lässt sich eine Reihe von verschiedenen Grössen ausrechnen.

Als Herdtiefen habe ich folgende 9 Zahlen gewählt:

$$h = 1,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35 \text{ und } 40 \text{ Kilometer}$$

und für Δ

$$\Delta = 50,\ 100,\ 150,\ 200,\ 250,\ 300,\ 350,\ 400,\ 450 \text{ und } 500 \text{ Klm.}$$

Zuerst berechnete ich nach der Formel $x_1 = \left(1 - \frac{h}{r_0}\right)^2$ (siehe die Formeln (29) und (30)) den jedem h zugehörigen Wert von x_1 und dann nach den Formeln (61) und (57) die Werte von $\Delta_m = r_0 \vartheta_m$ und e_m, wo der Emergenzwinkel ein Minimum wird, also die entsprechende Laufzeitkurve einen Inflexionspunkt aufweist. Nebenbei befinden sich in der folgenden Tabelle I, in Klammern eingesetzt, die Werte von (Δ_m) und (e_m) für den hypothetischen Fall, dass $c = 0$ wird, also dass die seismischen Strahlen

---

[1]) «Ueber Erdbebenwellen. III. Berechnung von Weg und Geschwindigkeit der Vorläufer. Die Poisson'sche Konstante im Erdinnern».

Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1909.

sich gradlinig ausbreiten. Diese letzteren Werte ergeben sich unmittelbar aus den Formeln (82) und (81)

Alle diese Zahlen sind in folgender Tabelle I niedergelegt.

Tabelle I.

h	x_1	Δ_m	(Δ_m)	e_m	(e_m)
1 Klm.	0,99969	52,6 Klm.	112,1 Klm.	2° 8,8	1° 0,5
5	0,99843	118,4	252,6	4 50,0	2 16,3
10	0,99686	167,4	357,3	6 50,4	3 12,8
15	0,99530	204,2	437,2	8 22,4	3 55,9
20	0,99373	235,5	505,0	9 40,7	4 32,5
25	0,99218	262,8	564,1	10 48,8	5 4,4
30	0,99060	287,6	618,6	11 51,8	5 33,8
35	0,98904	310,1	668,3	12 49,0	6 0,6
40	0,98749	330,8	714,1	13 42,1	6 25,3

Diese Tabelle zeigt, dass bei einigermaassen bedeutenden Herdtiefen der Inflexionspunkt der betreffenden Laufzeitkurve ziemlich weit vom Epizentrum liegt; so z. B. ist für $h = 40$ Klm. Δ_m schon gleich 330,8 Klm. Bei gradliniger Ausbreitung der Strahlen würde der betreffende Punkt mehr als zweimal weiter liegen.

Der minimale Wert des Emergenzwinkels wächst mit wachsender Herdtiefe. Infolge der Krümmung der Bahn der seismischen Strahlen ergibt sich e_m mehr als doppelt so gross als (e_m) für den Fall, wo die Strahlen sich gradlinig ausbreiten würden.

Die weiteren Rechnungen beziehen sich auf die Bestimmung der Werte des Emergenzwinkels e und der Laufzeit T *vom Herde aus gerechnet* für bestimmte, gegebene Werte von h und Δ.

Den ausgewählten Epizentralentfernungen Δ entsprechen folgende Zentralwinkel $\vartheta = \frac{\Delta}{r_0}$. (Siehe die Tabelle II).

Zuerst berechnete man bei Zugrundelegung des früher angegebenen Wertes von c für jede Herdtiefe h, resp. x_1, die Werte von e für die verschiedenen angegebenen ϑ. Dazu dienten die Formeln (68), (69), (70) und (72).

Tabelle II.

Δ	ϑ
50 Klm.	0° 27,0
100	0 54,0
150	1 20,9
200	1 47,9
250	2 14,9
300	2 41,9
350	3 8,9
400	3 35,8
450	4 2,8
500	4 29,8

Alsdann berechnete man nach der Formel (48) R, wobei zu beachten ist, dass von $\Delta = 0$ bis zum Inflexionspunkt der Laufzeitkurve ($\Delta = \Delta_m$) R positiv und für grössere Werte von Δ R negativ wird. Im Inflexionspunkte selbst wird $R = 0$.

Bringt man nun diese Werte von e und R in die Formel (54) ein (man sehe auch die Beziehungen (51) und (52)), so lässt sich weiter die entsprechende Laufzeit T berechnen. Bei diesen Rechnungen muss man auf das Vorzeichen von R Acht geben.

T ist die Laufzeit vom Herde aus gerechnet.

Gewöhnlich versteht man unter Laufzeit die Differenz der Momente des Eintreffens einer und derselben Erdbebenphase im Beobachtungsort und Epizentrum selbst. Diese Laufzeit wollen wir durch T' bezeichnen.

Dann wird

$$T' = T - T_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (93)$$

sein, wo T_0 die Laufzeit der longitudinalen seismischen Wellen vom Herde bis zum Epizentrum bedeutet.

T_0 lässt sich aus derselben Formel (54) berechnen; es muss nur in ihr $e = 90°$ und nach der Formel (48)

$$R = + \sqrt{x_1 \{c x_1 + (1 - c)\}}$$

gesetzt werden.

Es wird also

$$T_0 = \frac{1}{2} n_0 r_0 \Big[1 - \sqrt{x_1 \{c x_1 + (1-c)\}} + \frac{1}{4} \frac{1-c}{\sqrt{c}} \Big\{ \lg \frac{1+\beta}{1-\beta} - \lg \frac{1+\beta_1 \sqrt{x_1 \{c x_1 + (1-c)\}}}{1-\beta_1 \sqrt{x_1 \{c x_1 + (1-c)\}}} \Big\} \Big] \quad \ldots\ldots (94)$$

Diese Formel lässt sich in eine einfachere Gestalt bringen.

Aus den Beziehungen (51) und (52) folgt

$$\lg \frac{1+\beta}{1-\beta} = \lg \frac{\left\{1 + \frac{2\sqrt{c}}{1+c}\right\}^2}{1 - \frac{4c}{(1+c)^2}} = \lg \frac{\{1+c+2\sqrt{c}\}^2}{(1-c)^2} = 4 \lg (1+\sqrt{c}) - \lg (1-c)^2$$

und

$$\lg \frac{1+\beta_1 \sqrt{x_1}\sqrt{1-c+cx_1}}{1-\beta_1 \sqrt{x_1}\sqrt{1-c+cx_1}} = \lg \frac{\left\{1 + \frac{2\sqrt{c}}{1-c+2cx_1} \sqrt{x_1}\sqrt{1-c+cx_1}\right\}^2}{1 - \frac{4cx_1\{1-c+cx_1\}}{\{1-c+2cx_1\}^2}}$$

$$= \lg \frac{\{(1-c+cx_1) + 2\sqrt{cx_1} \cdot \sqrt{1-c+cx_1} + cx_1\}^2}{(1-c)^2 + 4cx_1(1-c) + 4c^2 x_1^2 - 4cx_1(1-c) - 4c^2 x_1^2}$$

$$= 4 \lg \{\sqrt{cx_1} + \sqrt{1-c+cx_1}\} - \lg (1-c)^2.$$

Bringt man nun diese Ausdrücke in die Formel (94), so hebt sich $\lg (1-c)^2$ weg und es bleibt also

$$T_0 = \frac{1}{2} n_0 r_0 \Big[1 - \sqrt{x_1}\sqrt{1-c(1-x_1)} + \frac{1-c}{\sqrt{c}} \{\lg (1+\sqrt{c}) - \lg (\sqrt{cx_1} + \sqrt{1-c(1-x_1)})\} \Big] \ldots . (95)$$

Nach dieser Formel lässt sich T_0 leicht berechnen.

Für $x_1 = 1$ ergibt sich $T_0 = 0$, wie es auch sein muss.

In derselben Weise, wie wir den Ausdruck für T_0 vereinfacht haben, lässt sich der allgemeine Ausdruck für T aus der Formel (54) in eine für die Rechnungen bequemere Form bringen.

Es wird nämlich auf Grund der Beziehungen (51), (52) und (48)

$$\lg \frac{1+\beta \sin e}{1-\beta \sin e} = \lg \frac{\left\{1 + \frac{2\sqrt{c}}{1+c} \cdot \sin e\right\}^2}{1 - \frac{4c}{(1+c)^2} \sin^2 e} = \lg \frac{\{1+c+2\sqrt{c}\sin e\}^2}{(1+c)^2 - 4c \sin^2 e}$$

$$= 2 \lg \{1 + c + 2\sqrt{c} \sin e\} - \lg \{(1+c)^2 - 4c \sin^2 e\}$$

und

$$\lg\frac{1+\beta_1 R}{1-\beta_1 R}=\lg\frac{\left\{1+\frac{2\sqrt{c}}{1-c+2cx_1}R\right\}^2}{1-\frac{4c}{(1-c+2cx_1)^2}R^2}=\lg\frac{\{1-c+2cx_1+2\sqrt{c}R\}^2}{(1-c+2cx_1)^2-4c\{cx_1^2+(1-c)x_1-\cos^2 e\}}$$

$$=\lg\frac{\{1-c+2cx_1+2\sqrt{c}R\}^2}{(1-c)^2+4cx_1(1-c)+4c^2x_1^2-4c^2x_1^2-4cx_1(1-c)+4c\cos^2 e}$$

$$=2\lg\{1-c+2cx_1+2\sqrt{c}R\}-\lg\{(1+c)^2-4c\sin^2 e\}.$$

Bringen wir diese Ausdrücke in die Formel (54) ein, so hebt sich

$$\lg\{(1+c)^2-4c\sin^2 e\}$$

weg und es bleibt

$$T_0=\tfrac{1}{2}n_0 r_0\Big[\sin e-R$$

$$+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-c}{\sqrt{c}}\Big\{\lg\{1+c+2\sqrt{c}\sin e\}-\lg\{1-c+2cx_1+2\sqrt{c}R\}\Big\}\Big]....(96)$$

Sind nun T und T_0 einmal bekannt, so lässt sich sofort nach der Formel (93) der entsprechende Wert von T' bestimmen.

In den folgenden Tabellen III bis XI sind nun die Resultate dieser Rechnungen für 9 verschiedene Werte von h zusammengestellt.

Die erste Kolumne jeder Tabelle enthält den Wert der Epizentralentfernung Δ, die zweite den entsprechenden Wert des Emergenzwinkels e, die dritte den Wert von R, die vierte — die Laufzeit T (vom Herde aus) und die fünfte — die Laufzeit T' (vom Epizentrum aus).

Neben jedem h ist der entsprechende Wert von T_0 angegeben.

Man erhält auf diese Weise eine Anzahl von Laufzeiten in ihrer Abhängigkeit von Δ und der Herdtiefe h. Die Daten für den Inflexionspunkt der betreffenden Laufzeitkurve, wo $R=0$ wird, befinden sich in der früher angegebenen Tabelle I.

Alle diese 9 Tabellen sind, mit Ausnahme der Tabellen IV und XI, von meiner Assistentin Fräulein Reinfeld berechnet worden.

Wollen wir jetzt aus diesen Tabellen verschiedene Schlüsse ziehen.

Erstens, was ins Auge fällt, ist der sehr kleine Einfluss der Herdtiefe h auf die *absolute* Laufzeit T. Für ein und dasselbe Δ ändert sich T in ziemlich unregelmässiger Weise mit der Veränderung von h, aber die Differenz zwischen dem maximalen und minimalen Wert von T übersteigt eine Sekunde ($1^s,81$) nur für $\Delta=50$ Klm. Für die nächstfolgende Epizentralentfernung $\Delta=100$ Klm. ist $\Delta T=0^s,97$ und in allen übrigen Fällen noch kleiner.

Tabelle III.

$h = 1$ Klm. $T_0 = 0^s,13$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	2° 9′	0,00000	$7^s,33$	$7^s,20$
100	2 36	— 0,02550	13,83	13,70
150	3 25	— 0,04648	20,80	20,67
200	4 21	— 0,06576	27,67	27,54
250	5 20	— 0,08497	34,80	34,67
300	6 19	— 0,10348	41,74	41,61
350	7 20	— 0,12194	48,71	48,58
400	8 17	— 0,13921	55,25	55,12
450	9 21	— 0,15821	62,44	62,31
500	10 23	— 0,17671	69,43	69,30

Tabelle IV.

$h = 5$ Klm. $T_0 = 0^s,68$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	6° 43′	+ 0,08124	$7^s,02$	$6^s,34$
100	4 53	+ 0,01304	14,15	13,47
150	4 57	— 0,01924	20,69	20,01
200	5 31	— 0,04626	27,85	27,17
250	6 15	— 0,06907	34,80	34,12
300	7 5	— 0,09011	41,69	41,01
350	7 59	— 0,11045	48,62	47,94
400	8 55	— 0,13000	55,49	54,81
450	9 53	— 0,14940	62,39	61,71
500	10 51	— 0,16841	69,23	68,55

Tabelle V.

$h = 10$ Klm. $T_0 = 1^s,43$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	12° 20′	+ 0,17741	$6^s,99$	$5^s,56$
100	7 46	+ 0,06352	13,96	12,53
150	6 52	+ 0,01162	21,12	19,69
200	6 56	— 0,02037	27,57	26,14
250	7 24	— 0,04884	34,65	33,22
300	8 2	— 0,07332	41,56	40,13
350	8 49	— 0,09631	48,58	47,15
400	9 38	— 0,11770	55,44	54,01
450	10 31	— 0,13833	62,29	60,86
500	11 26	— 0,15854	69,14	67,71

Tabelle VI.

$h = 15$ Klm. $T_0 = 2^s,10$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	17° 42′	+ 0,26674	$7^s,27$	$5^s,17$
100	10 34	+ 0,11149	14,04	11,94
150	8 46	+ 0,04528	20,93	18,83
200	8 22	0,00000	28,39	26,29
250	8 33	— 0,02916	34,62	32,52
300	9 0	— 0,05710	41,56	39,46
350	9 38	— 0,08240	48,55	46,45
400	10 21	— 0,10531	55,32	53,22
450	11 9	— 0,12740	62,18	60,08
500	12 1	— 0,14870	69,01	66,91

Tabelle VII.

$h = 20$ Klm. $T_0 = 2^s,78$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	22° 51′	+ 0,34992	$7^s,46$	$4^s,68$
100	13 22	+ 0,15862	14,13	11,35
150	10 40	+ 0,07772	20,93	18,15
200	9 48	+ 0,02720	27,86	25,08
250	9 41	— 0,00775	34,69	31,91
300	9 58	— 0,04099	41,59	38,81
350	10 28	— 0,06844	48,49	45,71
400	11 5	— 0,09295	55,24	52,56
450	11 48	— 0,11653	62,12	59,34
500	12 35	— 0,13878	68,90	66,12

Tabelle VIII.

$h = 25$ Klm. $T_0 = 3^s,46$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	27° 32′	+ 0,42323	$7^s,66$	$4^s,20$
100	16 5	+ 0,20362	14,26	10,80
150	12 32	+ 0,10918	20,98	17,52
200	11 13	+ 0,05138	27,82	24,36
250	10 50	+ 0,00894	34,75	31,29
300	10 55	— 0,02530	41,21	37,75
350	11 16	— 0,05459	48,75	45,29
400	11 48	— 0,08124	55,28	51,82
450	12 27	— 0,10592	62,08	58,62
500	13 10	— 0,12907	68,79	65,33

Tabelle IX.

$h = 30$ Klm. $T_0 = 4^s,17$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	32° 40′	+ 0,49916	$7^s,91$	$3^s,74$
100	18 46	+ 0,24759	14,42	10,25
150	14 25	+ 0,14029	21,08	16,91
200	12 37	+ 0,07349	28,15	23,98
250	11 59	+ 0,02811	34,78	30,61
300	11 53	— 0,00894	41,59	37,42
350	12 6	— 0,04049	48,27	44,10
400	12 33	— 0,07000	55,69	51,52
450	13 5	— 0,09482	61,99	57,52
500	13 45	— 0,11933	68,73	64,56

Tabelle X.

$h = 35$ Klm. $T_0 = 4^s,85$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	36° 4	+ 0,54535	$8^s,43$	$3^s,58$
100	21 23	+ 0,28919	14,60	9,75
150	16 15	+ 0,17038	21,19	16,34
200	14 3	+ 0,09854	27,94	23,09
250	13 9	+ 0,04733	34,84	29,99
300	12 49	+ 0,00707	41,55	36,70
350	12 55	— 0,02702	48,33	43,53
400	13 14	— 0,05701	55,17	50,32
450	13 44	— 0,08420	61,89	57,04
500	14 20	— 0,10973	68,65	63,80

Tabelle XI.

$h = 40$ Klm. $T_0 = 5^s,52$.

Δ	e	R	T	$T' = T - T_0$
50 Klm.	39° 44′	+ 0,59369	$8^s,80$	$3^s,28$
100	23 53	+ 0,32838	14,80	9,28
150	18 3	+ 0,19953	21,32	15,80
200	15 26	+ 0,12129	28,00	22,48
250	14 14	+ 0,06603	34,76	29,24
300	13 46	+ 0,02302	41,51	35,99
350	13 44	— 0,01378	48,42	42,90
400	13 57	— 0,04483	55,05	49,53
450	14 22	— 0,07355	61,80	56,28
500	14 54	— 0,10015	68,55	63,03

Was aber die Laufzeiten T', vom Epizentrum aus gerechnet, anbelangt und was sich tatsächlich auf die Laufzeitkurven, wie sie zur Zeit gezeichnet werden, bezieht, so macht sich hier der Einfluss der Herdtiefe ziemlich stark geltend.

Für ein und dasselbe Δ nimmt T' mit wachsendem h fast ohne Ausnahme stetig ab. Die entsprechenden Werte sind in der folgenden Tabelle XII für $h = 1$ und $h = 40$ Klm. gruppiert.

Diese Werte von $\delta T'$ sind keineswegs klein und übersteigen bei weitem die Genauigkeitsgrenze in der Bestimmung der Momente des Eintreffens der ersten Vorphase P.

Trägt man die in den früheren Tabellen gegebenen Werte von T' für verschiedene h auf ein Koordinatennetz auf, indem man Δ als Abszisse und T' als Ordinate wählt, so erhält man eine Reihe von Laufzeitkurven, von denen jede einer bestimmten Herdtiefe zugeordnet ist. Alle diese Kurven weichen recht wenig, innerhalb der gegebenen Grenzen von Δ, von einer geraden Linie ab. Sie sind jedoch bestimmte *Kurven*, die einen Inflexionspunkt haben, was daraus ersichtlich ist, dass der Emergenzwinkel e, wie die Tabellen uns lehren, durch ein Minimum und R durch Null hindurchgeht.

Auf der folgenden Fig. 8 sind zwei solche Laufzeitkurven für $h = 1$ und $h = 40$ gezeichnet.

Tabelle XII.

Δ	T'		$\delta T'$
	$h = 1$	$h = 40$	
50 Klm.	$7^s,20$	$3^s,28$	$3^s,92$
100	13,70	9,28	4,42
150	20,67	15,80	4,87
200	27,54	22,48	5,06
250	34,67	29,24	5,43
300	41,61	35,99	5,62
350	48,58	42,90	5,68
400	55,12	49,53	5,59
450	62,31	56,28	6,03
500	69,30	63,03	6,27

Wie wir sehen, tritt der betreffende Inflexionspunkt der Laufzeitkurve nicht deutlich zum Vorschein und seine genaue Lage kann nur rechnerisch festgestellt werden.

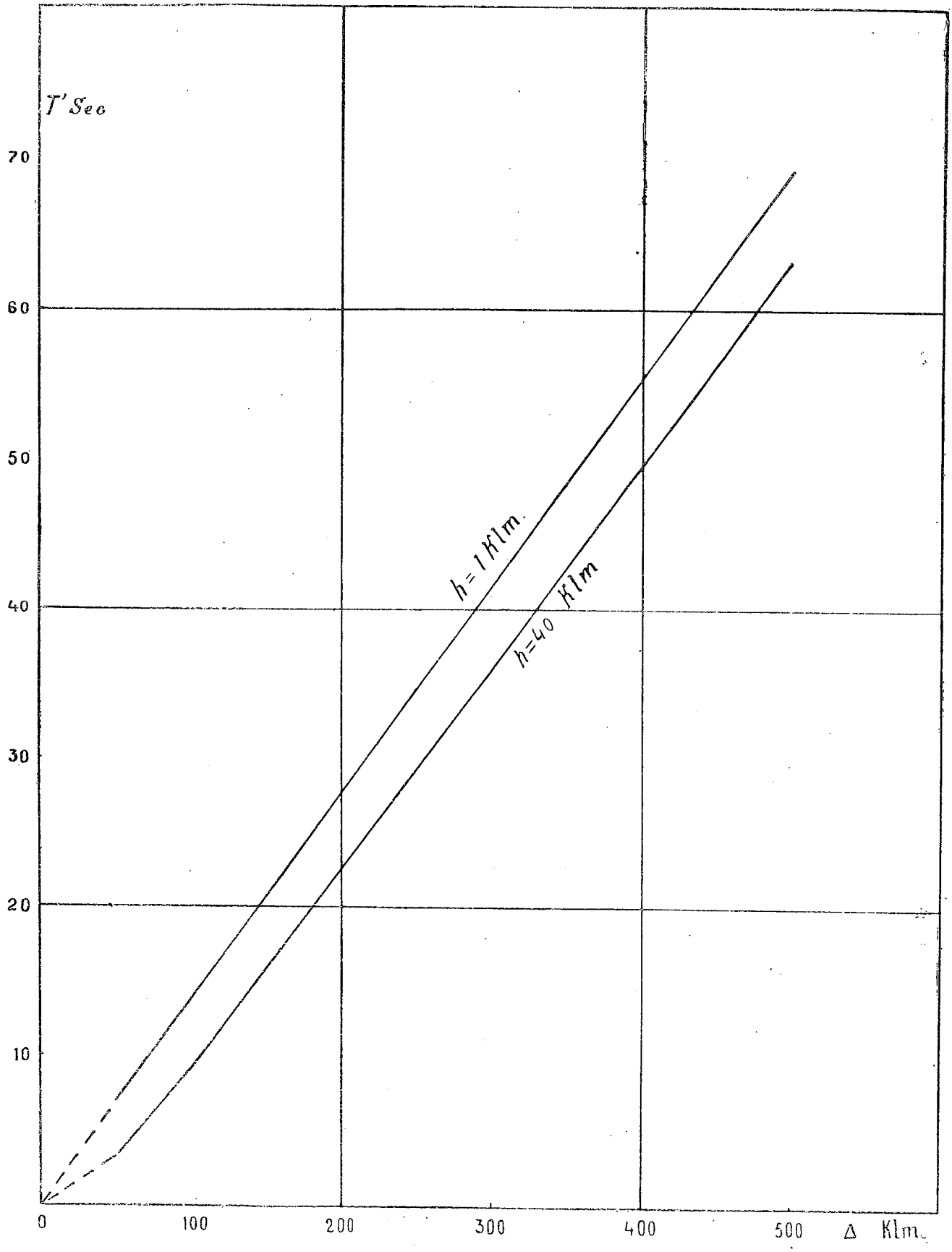
Um desto weniger kann man bei dem jetzigen Stande der Genauigkeit der seismometrischen Beobachtungen bei einer für ein bestimmtes Beben empirisch erhaltenen Laufzeitkurve, die immer mit gewissen Fehlern behaftet ist, die Lage des Inflexionspunktes feststellen.

Wäre das möglich, d. h. hätte man $\vartheta_m = \frac{\Delta_m}{r_0}$ und e_m nach der Formel (63) $\cos e = v_0 \frac{dT}{d\Delta}$ gefunden, so könnte man nach der Formel (59) die Konstante c und nach der Formel (57) den der gegebenen Herdtiefe h zugehörigen Wert von x_1 bestimmen, also die Herdtiefe selbst finden.

Leider lässt sich dies nicht praktisch durchführen, da die Laufzeitkurven in dem betreffenden Intervall sich zu wenig von einer Geraden unterscheiden. Infolgedessen sind die Methoden zur Bestimmung der Herdtiefe eines Bebens, die auf dem Inflexionspunkt der Laufzeitkurve basieren, praktisch ziemlich aussichtslos und es muss nach anderen Methoden gesucht werden.

Die früheren Tabellen und die Fig. 8 zeigen in allerdeutlichster Weise,

Fig. 8.



dass die Lage der Laufzeitkurven für T' von der Herdtiefe ziemlich stark abhängig ist.

Also *jeder Herdtiefe kommt ihre eigene Laufzeitkurve zu.*

Von diesem Umstand muss unbedingt Rechenschaft getragen werden und es ist völlig unnütz nach einer allgemein gültigen Laufzeitkurve für T' bei kleinen Epizentralentfernungen zu suchen, da bei solchen der Einfluss der Herdtiefe sich schon ziemlich stark geltend macht. Dieser Einfluss ist leider bisjetzt nicht genügend berücksichtigt worden.

Hat man die genaue Zeit t_0' des Ausbruches eines Bebens im Epizentrum selbst und beobachtet auf verschiedenen seismischen Stationen die Momente t' des Eintreffens der ersten Vorläufer, so findet man sofort die Laufzeit $T' = t' - t_0'$ und kann also die entsprechende Laufzeitkurve ziehen. Wenn c bekannt ist, kann man aus der Lage der Laufzeitkurve auf die Tiefe des entsprechenden Herdes schliessen.

Das wäre eine ziemlich praktische Methode, wenn t_0' wirklich bekannt wäre.

Leider wird t_0' sehr selten direkt beobachtet. Gewöhnlich findet man t_0' durch Extrapolation aus den Daten für t' für benachbarte Stationen; in dieser Hinsicht kann man aber sehr grosse Fehler begehen, wie wir es sofort sehen werden.

In der Tat verlaufen alle Laufzeitkurven (T') für verschiedene h von $\Delta = 50$ aus fast gradlinig, wobei einige Kurven höher, die anderen niedriger liegen, aber der Natur der Sache nach müssen alle diese Kurven im Anfangspunkt 0 der Koordinaten (siehe die Fig. 8) sich schneiden.

Wenn für $h = 1$ Klm. die Verlängerung durch lineare Extrapolation der Laufzeitkurve wirklich fast genau durch 0 hindurchgeht, so ist dies für $h = 40$ Klm. keineswegs der Fall. Hätte man die entsprechende Kurve linear extrapoliert, so würde dieselbe die Zeitaxe in einem Punkt schneiden, welcher $2^s,72$ Sekunden unter der Δ-Axe liegt (siehe die Tabelle XI, wo für $\Delta = 50$ $T' = 3^s,28$ und für $\Delta = 100$ $T' = 9^s,28$ ist). Man würde also ein falsches t_0', und folglich auch falsche Laufzeiten T' bekommen.

Die anfänglichen Teile der Laufzeitkurven, wenn die h einigermaassen gross sind, sind ziemlich stark gekrümmt und eine lineare Extrapolation zur Aufsuchung von t_0' ist *keineswegs zulässig*, obgleich man zur Zeit meistenteils so verfährt. Will man die Laufzeitkurven für T' zur Bestimmung von h verwenden, so muss man schon den *direkt beobachteten* Moment t_0' in Betracht ziehen.

Wenn dieser unbekannt ist, so lohnt es sich eher die absoluten Laufzeiten T zur Hülfe zu nehmen. Wie in diesem Fall zu verfahren ist, wer-

den wir gleich sehen, obgleich es schon jetzt betont werden mag, dass diese Methode auf keine grosse Genauigkeit Anspruch erheben kann.

Die früheren Tabellen III bis XI zeigen, dass für kleine Epizentralentfernungen die Grösse des Emergenzwinkels der seismischen Strahlen sehr stark von der Herdtiefe beeinflusst wird. Um dies zu veranschaulichen, sind in den folgenden Tabellen XIII und XIV die Werte von e bei $\Delta = 50$ und $\Delta = 100$ für verschiedene h zusammengestellt.

Tabelle XIII.

$\Delta = 50$ Klm.

h	e
1 Klm.	2° 9′
5	6 43
10	12 20
15	17 42
20	22 51
25	27 32
30	32 40
35	36 4
40	39 44

Tabelle XIV.

$\Delta = 100$ Klm.

h	e
1 Klm.	2° 36′
5	4 53
10	7 46
15	10 34
20	13 22
25	16 5
30	18 46
35	21 23
40	23 53

Wir sehen also, dass der Emergenzwinkel ein sehr empfindliches Reagens auf die Herdtiefe ist. Würde man die wahren Emergenzwinkel für nahe liegende Stationen aus direkten Beobachtungen bekommen, so könnte man auf Grundlage dieser eine neue Methode zur Bestimmung von Herdtiefen aufbauen, welche viel empfindlicher als die auf Laufzeiten beruhenden wäre. Da aber, meines Wissens, zur Zeit nirgends ausser in Pulkovo direkte Beobachtungen über den Emergenzwinkel angestellt werden, so ist es überflüssig auf diese Frage hier weiter einzugehen.

Es liesse sich freilich der Emergenzwinkel aus den beobachteten Laufzeitkurven nach der Formel (63) entnehmen, da aber dieselben bis jetzt so ungenau sind, so kann man auf diese Weise keine zuverlässigen Werte von e erhalten, da in der Durchziehung der Laufzeitkurve durch bestimmte

Punkte noch sehr viel Willkür herrscht. Ausserdem würde eine solche Bestimmung von e die Kenntnis von v_0 erfordern, welches selbst als eine Unbekannte in unseren Gleichungen aufzufassen ist, da es höchst wahrscheinlich in verschiedenen Erdteilen etwas verschiedene Werte besitzt.

Bevor wir zur Behandlung eines bestimmten Beispieles der Berechnung der Herdtiefe, nämlich der des Süd-Deutschen Bebens vom 16. November 1911, übergehen, wollen wir noch die Tiefe h_m bestimmen, bis zu welcher die seismischen Strahlen gelangen, wenn sie an der Erdoberfläche in verschiedenen Epizentralentfernungen Δ eintreffen. Dazu wollen wir die vereinfachte Voraussetzung machen, dass der Herd mit dem Epizentrum zusammenfällt, also $h = 0$, oder $x_1 = 1$ wird.

Zuerst muss man den Emergenzwinkel e für verschiedene Δ, resp. ϑ, bestimmen.

Dazu wird man am einfachsten die Formel (87) verwenden, wonach

$$\sin(2e - \vartheta) = c \sin \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (97)$$

ist.

Zur Feststellung der Tiefe h_m, zu welcher die seismischen Strahlen gelangen, hat man nach den Formeln (29) und (30) die Beziehung

$$x_m = \left(1 - \frac{h_m}{r_0}\right)^2$$

oder

$$h_m = r_0 \{1 - \sqrt{x_m}\},$$

wo x_m aus der Formel (89), da jetzt e bekannt ist, zu entnehmen ist, wobei dieselbe zu Rechnungszwecken für kleine Werte von ϑ und e in die folgende bequemere Form zu bringen ist:

$$x_m = 1 - \frac{\sin e . \sin \frac{\vartheta}{2}}{\cos\left(e - \frac{\vartheta}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

Für den Fall einer gradlinigen Ausbreitung der Strahlen wird $c = 0$ und nach den Formeln (97) und (98)

$$e = \frac{\vartheta}{2}$$

und

$$x_m = \cos^2 e,$$

also

$$h_m = r_0 (1 - \cos e).$$

Für diese Rechnungen wird man sich am bequemsten der entsprechenden Reihenentwickelungen bedienen.

In der folgenden Tabelle XV sind nun diese Werte von e und h_m zusammengestellt, wobei diejenigen, die auf eine gradlinige Ausbreitung der Strahlen sich beziehen, in Klammern gesetzt sind.

Tabelle XV.

Δ	h_m	(h_m)	e	(e)
50 Klm.	0,22 Klm.	0,05 Klm.	1° 1′,1	0° 13′,5
100	0,89	0,20	2 2,3	0 27,0
150	2,00	0,44	3 3,4	0 40,5
200	3,57	0,79	4 4,8	0 54,0
250	5,58	1,23	5 6,2	1 7,5
300	8,05	1,77	6 7,9	1 21,0
350	10,98	2,41	7 9,8	1 34,5
400	14,36	3,14	8 11,6	1 47,9
450	18,22	3,97	9 14,0	2 1,4
500	22,56	4,90	10 16,8	2 14,9

Diese Tabelle zeigt, dass für die hier vorkommenden Epizentralentfernungen die seismischen Strahlen sehr wenig in das Erdinnere eindringen. Selbst für $\Delta = 500$ Klm. beträgt h_m nur 22,56 Klm. Wäre die Bahn der Strahlen nicht gekrümmt, so würden dieselben etwa $4^1/_2$ Mal weniger tief eindringen. Infolge dieser Krümmung werden auch die entsprechenden Emergenzwinkel etwa $4^1/_2$ Mal grösser sein.

Wollen wir jetzt zu einer praktischen Anwendung der in diesem Aufsatz angegebenen Formeln übergehen.

Die wichtigsten derselben beziehen sich auf die absolute Laufzeit T vom Herde aus gerechnet und den Emergenzwinkel e.

Ich werde dieselben, der Uebersichtlichkeit halber, hier nochmals zusammenstellen.

Es ist nämlich

$$\frac{2T}{n_0 r_0} = \sin e - R + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \left\{ \lg \frac{1+\beta \sin e}{1-\beta \sin e} - \lg \frac{1+\beta_1 R}{1-\beta_1 R} \right\}, \quad \ldots . (54)$$

wo

$$\beta = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

$$\beta_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1-c+2cx_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

und

$$R = \sqrt{cx_1^2 + (1-c)x_1 - \cos^2 e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

wird.

Andererseits ist

$$\sin^2 e = 1 - F.[B + 2\sqrt{x_1}.\cos\vartheta.P], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

wo

$$F = \frac{1}{4 + \frac{(1-x_1)^2}{x_1 \sin^2\vartheta}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

$$B = 1 + x_1 - c(1 - x_1 + 2x_1 \sin^2\vartheta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

und

$$P = +\sqrt{1 - c(1-x_1) - c^2 x_1 \sin^2\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

bedeutet.

Bringt man nun den Wert von e aus der Formel (72) in die Gleichung (54) ein, so ergibt sich ein Ausdruck für T als Funktion der Epizentralentfernung $\vartheta = \frac{\Delta}{r_0}$ und der drei Konstanten x_1, c und $n_0 = \frac{1}{v_0}$.

$$T = \Phi(\vartheta, x_1, c, n_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

Denken wir uns nun, dass die Beobachtungen eine Reihe zusammengehöriger Werte von T und ϑ geliefert haben; dann ist die Möglichkeit geboten auf Grund der Beziehung (99) die drei Unbekannten x_1, c und n_0 zu bestimmen. Die erste liefert die Herdtiefe, die zweite die Zunahme der Ausbreitungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen mit der Tiefe und die dritte die entsprechende Geschwindigkeit v_0 in den aller obersten Erdschichten.

Eine direkte Bestimmung dieser drei Grössen aus diesen Formeln würde jedoch sehr grosse Schwierigkeiten darbieten. Infolgedessen lohnt es sich ein Näherungsverfahren einzuschlagen, welches viel bequemer ist und rascher zum Ziele führt. Man nimmt nämlich für x_1, c und n_0 angenäherte Werte $(x_1)_0$, c_0 und $(n_0)_0$ an und sucht die Zuwächse δx_1, δc und δn_0 auf, die man ihnen geben muss, damit sie mit den Beobachtungsergebnissen am besten im Einklange stehen. Dann werden die drei Unbekannten nur in einer

linearen Form auftreten und ihre Bestimmung wird verhältnismässig einfach sein.

$$T - \Phi(\vartheta, (x_1)_0, c_0, (n_0)_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \cdot \delta c + \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} \cdot \delta n_0.$$

Zur Bestimmung von δx_1, δc und δn_0 lohnt es sich die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden. Wenn diese Korrektionen bekannt sind, kann man mit den verbesserten Werten der Unbekannten die Rechnungen nochmals wiederholen und zweite Näherungswerte aufsuchen u. s. w.

Es handelt sich also nur darum, auf Grund der früher angegebenen Beziehungen entsprechende Differentialformeln aufzustellen.

Es tritt aber hier eine kleine Schwierigkeit auf.

Eine *allgemein gültige* Entwickelung für R nach Potenzen von δx_1 und δc ist nicht möglich, da R, welches ein Wurzelausdruck ist, im Inflexionspunkte der Laufzeitkurve gleich Null wird. Infolgedessen muss man die nötigen Formeln in eine solche Gestalt bringen, dass in ihnen R nur im Quadrat auftritt. Das ist auch insofern bequem, da man dann nicht mehr das Vorzeichen von R zu berücksichtigen braucht und es völlig gleichgültig ist, ob der betreffende Beobachtungsort näher oder weiter als der Inflexionspunkt der Laufzeitkurve vom Epizentrum liegt.

Zur Aufstellung dieser Formeln wollen wir jetzt übergehen.

Sei α eine Grösse, die kleiner als die Einheit ist. Dann hat man

$$\lg \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = 2\alpha f(\alpha^2),$$

wo

$$f(\alpha^2) = 1 + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^4}{5} + \frac{\alpha^6}{7} + \ldots.$$

ist.

Dann lässt sich die Gleichung (54) folgendermaassen schreiben:

$$\frac{2T}{n_0 r_0} = \sin e \left[1 + \frac{1-c}{2\sqrt{c}} \cdot \beta \cdot f(\beta^2 \sin^2 e)\right] - R\left[1 + \frac{1-c}{2\sqrt{c}} \cdot \beta_1 \cdot f(\beta_1^2 R^2)\right].$$

Setzen wir hierin die Werte von β und β_1 vor dem Ausdruck der Funktion f ein, so ergibt sich

$$\frac{2T}{n_0 r_0} = \sin e \left[1 + \frac{1-c}{1+c} \cdot f(\beta^2 \sin^2 e)\right] - R\left[1 + \frac{1-c}{1-c+2cx_1} \cdot f(\beta_1^2 R^2)\right] \ldots.(100)$$

Wollen wir jetzt den Zuwachs von $\sin^2 e$ und R^2 aufsuchen.

Auf Grund der Beziehungen (29) und (30) ist

$$\delta x_1 = -2(1-\xi)\delta\xi = -2\sqrt{x_1}.\delta\xi, \quad \ldots\ldots\ldots (101)$$

wo

$$\delta\xi = \frac{\delta h}{r_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (102)$$

ist.

Setzen wir

$$\sin^2 e = \sin^2 e_0 + A_1\,\delta\xi + A_2\,\delta c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (103)$$

Auf Grund der Beziehung (72) haben wir

$$A_1 = -\Big[\{B + 2\sqrt{x_1}\cos\vartheta . P\}\frac{\partial F}{\partial x_1} + F\frac{\partial B}{\partial x_1} + \\ + 2F\cos\vartheta\Big\{\frac{1}{2\sqrt{x_1}}\cdot P + \sqrt{x_1}\frac{\partial P}{\partial x_1}\Big\}\Big]\,\big[-2\sqrt{x_1}\big] \quad \ldots\ldots\ldots (104)$$

und

$$A_2 = -\Big[\{B + 2\sqrt{x_1}\cos\vartheta . P\}\frac{\partial F}{\partial c} + F\frac{\partial B}{\partial c} + 2F\sqrt{x_1}\cos\vartheta\frac{\partial P}{\partial c}\Big] \ldots (105)$$

Aus den Formeln (68), (69) und (70) folgt nun

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1-x_1^2}{x_1^2\sin^2\vartheta\left\{4 + \frac{(1-x_1)^2}{x_1\sin^2\vartheta}\right\}^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 1 + c(1 - 2\sin^2\vartheta)$$

$$\frac{\partial B}{\partial c} = -\{1 - x_1 + 2x_1\sin^2\vartheta)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{c(1 - c\sin^2\vartheta)}{2P}$$

$$\frac{\partial P}{\partial c} = \frac{-(1-x_1) - 2cx_1\sin^2\vartheta}{2P},$$

also

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}P + \sqrt{x_1}\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}.P}\{1 - c(1-x_1) - c^2x_1\sin^2\vartheta + cx_1 - c^2x_1\sin^2\vartheta\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_1}}\frac{1}{P}\{1 - c + 2cx_1 - 2c^2x_1\sin^2\vartheta\}.$$

Wollen wir nun folgende Bezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{4 + \frac{\{1-(x_1)_0\}^2}{(x_1)_0 \sin^2\vartheta}} \\
f_1 &= -\frac{2\{1-(x_1)_0^2\}}{(x_1)_0^{\frac{3}{2}} \sin^2\vartheta} \cdot \frac{1}{\left[4 + \frac{\{1-(x_1)_0\}^2}{(x_1)_0 \sin^2\vartheta}\right]^2} \\
B_0 &= \quad 1 + (x_1)_0 - c_0\{1 - (x_1)_0 + 2(x_1)_0 \sin^2\vartheta\} \\
b_1 &= -2\sqrt{(x_1)_0}\{1 + c_0(1 - 2\sin^2\vartheta\} \\
b_2 &= -\{1 - (x_1)_0 + 2(x_1)_0 \sin^2\vartheta\} \\
P_0 &= +\sqrt{1 - c_0(1 - (x_1)_0) - c_0^2 (x_1)_0 \sin^2\vartheta} \\
p_1 &= -\frac{2\cos\vartheta}{P_0}\{1 - c_0 + 2c_0(x_1)_0 - 2c_0^2(x_1)_0 \sin^2\vartheta\} \\
p_2 &= -\frac{\cos\vartheta}{P_0} \cdot \sqrt{(x_1)_0}\{1 - (x_1)_0 + 2c_0(x_1)_0 \sin^2\vartheta\}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(106)$$

Dann wird

$$\sin^2 e_0 = 1 - F_0[B_0 + 2\sqrt{(x_1)_0}\cos\vartheta P_0] \quad \ldots\ldots\ldots(107)$$

und

$$A_1 = -[F_0(b_1 + p_1) + f_1(B_0 + 2\sqrt{(x_1)_0}\cos\vartheta P_0)] \quad \ldots\ldots(108)$$

$$A_2 = -F_0(b_2 + p_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(109)$$

Die Differentialquotienten A_1 und A_2 sind also gefunden.

In ähnlicher Weise setzen wir

$$R^2 = R_0^2 + B_1 \delta\xi + B_2 \delta c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(110)$$

R^2 kann in folgender Form geschrieben werden:

$$R^2 = \sin^2 e - (1 - x_1)(1 + cx_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(111)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial R^2}{\partial \xi} = A_1 + \{(1 + cx_1) - c(1 - x_1)\}\{-2\sqrt{x_1}\}$$

und

$$\frac{\partial R^2}{\partial c} = A_2 - (1 - x_1)x_1.$$

Es ergibt sich also

$$R_0^2 = \sin^2 e_0 - (1 - (x_1)_0)(1 + c_0 (x_1)_0), \quad \ldots\ldots\ldots (112)$$

$$B_1 = A_1 - 2\sqrt{(x_1)_0}\{1 - c_0(1 - 2(x_1)_0)\} \quad \ldots\ldots\ldots (113)$$

und

$$B_2 = A_2 - (x_1)_0(1 - (x_1)_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (114)$$

Wollen wir noch die Zuwächse von β und β_1 bestimmen.

Setzen wir

$$\beta_0 = \frac{2\sqrt{c_0}}{1 + c_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (115)$$

und

$$(\beta_1)_0 = \frac{2\sqrt{c_0}}{1 - c_0 + 2c_0 (x_1)_0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (116)$$

dann wird

$$\beta = \beta_0 \left[1 + \frac{1 - c_0}{1 + c_0} \cdot \frac{1}{2c_0} \cdot \delta c\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (117)$$

$$\beta^2 = \beta_0^2 \left[1 + \frac{1 - c_0}{1 + c_0} \cdot \frac{1}{c_0} \cdot \delta c\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (118)$$

und

$$\beta^2 \sin^2 e = \beta_0^2 [\sin^2 e_0 + A_1 \delta\xi + A_2 \delta c]\left[1 + \frac{1 - c_0}{1 + c_0} \cdot \frac{1}{c_0} \cdot \delta c\right].$$

Setzen wir

$$A_2' = A_2 + \frac{\sin^2 e_0}{c_0} \cdot \frac{1 - c_0}{1 + c_0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (119)$$

dann wird

$$\beta^2 \sin^2 e = \beta_0^2 [\sin^2 e_0 + A_1 \delta\xi + A_2' \delta c] \quad \ldots\ldots\ldots (120)$$

Weiter haben wir

$$\frac{1 - c}{1 + c} = \frac{1 - c_0}{1 + c_0}\left[1 - \frac{2}{1 - c_0^2} \cdot \delta c\right]$$

oder

$$\frac{1 - c}{1 + c} = \frac{1 - c_0}{1 + c_0}[1 + h_0 \delta c], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (121)$$

wenn

$$h_0 = -\frac{2}{1 - c_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (122)$$

gesetzt wird.

In ganz ähnlicher Weise finden wir

$$\beta_1 = (\beta_1)_0 [1 + h_1 \delta\xi + h_2 \delta c],$$

wo

$$h_1 = \frac{4c_0 \sqrt{(x_1)_0}}{1 - c_0 + 2c_0 (x_1)_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (123)$$

und

$$h_2 = \frac{1 + c_0 - 2c_0 (x_1)_0}{2c_0 \{1 - c_0 + 2c_0 (x_1)_0\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (124)$$

wird.

Daraus erhält man

$$\beta_1^2 R^2 = (\beta_1)_0^2 [1 + 2h_1 \delta\xi + 2h_2 \delta c] [R_0^2 + B_1 \delta\xi + B_2 \delta c].$$

Setzen wir

$$B_1' = B_1 + 2h_1 R_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (125)$$

und

$$B_2' = B_2 + 2h_2 R_0^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (126)$$

dann wird

$$\beta_1^2 R^2 = (\beta_1)_0^2 [R_0^2 + B_1' \delta\xi + B_2' \delta c] \quad \ldots\ldots\ldots (127)$$

Es erübrigt noch den Zuwachs von $\frac{1-c}{1-c+2cx_1}$ zu finden.

Es ergibt sich ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf die Beziehung (123)

$$\frac{1-c}{1-c+2cx_1} = \frac{1-c_0}{1-c_0+2c_0 (x_1)_0} [1 + h_1 \delta\xi + h_3 \delta c], \quad \ldots\ldots (128)$$

wo

$$h_3 = -\frac{2 (x_1)_0}{(1-c_0)\{1-c_0+2c_0 (x_1)_0\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (129)$$

gesetzt wird.

Wollen wir nun die hier gefundenen Ausdrücke in die Klammernausdrücke der Formel (100) einsetzen.

Dann ergibt sich

$$\frac{2T}{n_0 r_0} = \sin e \left[1 + \frac{1-c_0}{1+c_0} \{1 + h_0 \delta c\} f \{\beta_0^2 \sin^2 e_0 + \beta_0^2 A_1 \delta\xi + \beta_0^2 A_2' \delta c\}\right]$$

$$- R \left[1 + \frac{1-c_0}{1-c_0+2c_0 (x_1)_0} \{1 + h_1 \delta\xi + h_3 \delta c\} f \{(\beta_1)_0^2 R_0^2\right.$$

$$\left. + (\beta_1)_0^2 B_1' + (\beta_1)_0^2 B_2' \delta c\}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (130)$$

Bilden wir nun die Funktionen f aus.

Setzen wir dazu

$$\beta_0^2 \sin^2 e_0 = \alpha^2$$

und

$$\beta_0^2 A_1 \delta\xi + \beta_0^2 A_2' \delta c = \delta\gamma.$$

Dann wird

$$f(\alpha^2 + \delta\gamma) = 1 + \frac{\alpha^2 + \delta\gamma}{3} + \frac{(\alpha^2 + \delta\gamma)^2}{5} + \frac{(\alpha^2 + \delta\gamma)^3}{7} + \ldots.$$

$$= \left\{1 + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^4}{5} + \frac{\alpha^6}{7} + \ldots.\right\} + \left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{3}{7}\alpha^4 + \ldots.\right\} \delta\gamma.$$

Beide Reihen für $\alpha < 1$ sind konvergent.

Setzen wir also

$$\psi_0 = 1 + \frac{\beta_0^2 \sin^2 e_0}{3} + \frac{\beta_0^4 \sin^4 e_0}{5} + \frac{\beta_0^6 \sin^6 e_0}{7} + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots (131)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}\beta_0^2 \sin^2 e_0 + \frac{3}{7}\beta_0^4 \sin^4 e_0 + \frac{4}{9}\beta_0^6 \sin^6 e_0 + \ldots \quad \ldots (132)$$

und

$$\chi_0 = 1 + \frac{(\beta_1)_0^2 R_0^2}{3} + \frac{(\beta_1)_0^4 R_0^4}{5} + \frac{(\beta_1)_0^6 R_0^6}{7} + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots (133)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}(\beta_1)_0^2 R_0^2 + \frac{3}{7}(\beta_1)_0^4 R_0^4 + \frac{4}{9}(\beta_1)_0^6 R_0^6 + \ldots \quad \ldots (134)$$

Dann ergibt sich nach der Beziehung (130)

$$\frac{2T}{n_0 r_0} = \sin e \left[1 + \frac{1-c_0}{1+c_0}\{1 + h_0 \delta c\}\{\psi_0 + \beta_0^2 (A_1 \delta\xi + A_2' \delta c)\psi_1\}\right]$$

$$- R\left[1 + \frac{1-c_0}{1-c_0+2c_0 (x_1)_0}\{1 + h_1 \delta\xi + h_3 \delta c\}\{\chi_0 + (\beta_1)_0^2 (B_1' \delta\xi + B_2' \delta c)\chi_1\}\right] \ldots (135)$$

Wollen wir noch folgende vereinfachende Bezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= 1 + \frac{1-c_0}{1+c_0}\psi_0 \\ C_1 &= \frac{1-c_0}{1+c_0}\beta_0^2 A_1 \psi_1 \\ C_2 &= \frac{1-c_0}{1+c_0}\{\beta_0^2 A_2' \psi_1 + h_0 \psi_0\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (136)$$

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= 1 + \frac{1-c_0}{1-c_0+2c_0 (x_1)_0}\chi_0 \\ D_1 &= \frac{1-c_0}{1-c_0+2c_0 (x_1)_0}\{(\beta_1)_0^2 B_1' \chi_1 + h_1 \chi_0\} \\ D_2 &= \frac{1-c_0}{1-c_0+2c_0 (x_1)_0}\{(\beta_1)_0^2 B_2' \chi_1 + h_3 \chi_0\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 37)$$

und

$$u = \frac{2T}{n_0 r_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (138)$$

Dann kann man auf Grund der Gleichung (135) folgenden definitiven Ausdruck für u hinschreiben:

$$u = \sin e \{C_0 + C_1 \delta\xi + C_2 \delta c\} - R\{D_0 + D_1 \delta\xi + D_2 \delta c\} \ldots (139)$$

Wenn die angenäherten Werte der Konstanten $(x_1)_0$ und c_0 gegeben

sind, kann man für jede gegebene Epizentralentfernung ϑ nach den früher angeführten Formeln die 6 Koeffizienten C_0, C_1, C_2, D_0, D_1 und D_2 berechnen.

Wollen wir jetzt die Gleichung (139) weiter ausbilden. Wir schreiben dieselbe in folgender Form:

$$R\{D_0 + D_1\,\delta\xi + D_2\,\delta c\} = \sin e\{C_0 + C_1\,\delta\xi + C_2\,\delta c\} - u$$

und erheben sie ins Quadrat.

Dann wird

$$R^2[D_0^2 + 2D_0D_1\,\delta\xi + 2D_0D_2\,\delta c] = \sin^2 e\,[C_0^2 + 2C_0C_1\,\delta\xi + 2C_0C_2\,\delta c] - 2u\sin e\,[C_0 + C_1\,\delta\xi + C_2\,\delta c] + u^2.$$

Setzen wir hierin die Werte von R^2 und $\sin^2 e$ aus den Formeln (110) und (103) ein.

Dann ergibt sich

$$2u\sin e\,[C_0 + C_1\,\delta\xi + C_2\,\delta c] = (H_0 + u^2) + H_1\,\delta\xi + H_2\,\delta c, \ldots (140)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= C_0^2\sin^2 e_0 - D_0^2 R_0^2 \\ H_1 &= \{2C_0C_1\sin^2 e_0 + C_0^2 A_1\} - \{2D_0D_1R_0^2 + D_0^2 B_1\} \\ H_2 &= \{2C_0C_2\sin^2 e_0 + C_0^2 A_2\} - \{2D_0D_2R_0^2 + D_0^2 B_2\} \end{aligned}\right\} \ldots.(141)$$

wird.

Quadrieren wir die Gleichung (140) noch einmal.

Dann folgt

$$4u^2\sin^2 e\,[C_0^2 + 2C_0C_1\,\delta\xi + 2C_0C_2\,\delta c] = (H_0 + u^2)^2 + 2(H_0 + u^2)\{H_1\,\delta\xi + H_2\,\delta c\}.$$

Setzen wir wiederum hier den Wert von $\sin^2 e$ aus der Formel (103) ein, so folgt

$$\{2u^2G_1 - (H_0 + u^2)H_1\}\,\delta\xi + \{2u^2G_2 - (H_0 + u^2)H_2\}\,\delta c + 2u^2C_0^2\sin^2 e_0 - \tfrac{1}{2}(H_0 + u^2)^2 = 0, \ldots (142)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= 2C_0C_1\sin^2 e_0 + C_0^2 A_1 \\ G_2 &= 2C_0C_2\sin^2 e_0 + C_0^2 A_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (143)$$

wird.

In der Formel (142) tritt die Grösse

$$u = \frac{2T}{n_0 r_0} = \frac{2T}{r_0} \cdot v_0$$

auf.

v_0 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der longitudinalen seismischen Wellen in den allerobersten Erdschichten.

Nehmen wir für dieselbe einen angenäherten Wert $(v_0)_0$ an, so können wir setzen

$$v_0 = (v_0)_0 + \delta v$$

und es wird

$$u = \frac{2T}{r_0} \{(v_0)_0 + \delta v\}.$$

Setzen wir noch

$$\frac{2(v_0)_0}{r_0} = \gamma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (144)$$

$$\frac{\delta v}{(v_0)_0} = \delta\zeta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (145)$$

und

$$\gamma T = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (146)$$

Dann wird

$$u = z\,[1 + \delta\zeta] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (147)$$

T ist die wahre Laufzeit vom Herde aus gerechnet.

Was wir aber beobachten, ist ein bestimmter Zeitmoment t', welcher dem Eintreffen der ersten Vorläufer entspricht. Um die Laufzeit T zu bekommen, müsste man den wahren Moment t_0 des Ausbruches des Bebens im Herde selbst kennen.

Dann würde

$$T = t' - t_0$$

sein.

Um t_0 zu bekommen, verfährt man folgendermaassen.

Man nimmt einige nahe zum Epizentrum liegende Stationen und berechnet rückwärts mit den angenommenen Werten von $(x_1)_0$, c_0 und $(v_0)_0$ nach den früher angegebenen Formeln die theoretische Laufzeit, aus der man einen angenäherten Wert von t_0, etwa $(t_0)_0$, erhält.

Dann können wir setzen

$$t_0 = (t_0)_0 + \delta t,$$

also

$$T = t' - (t_0)_0 - \delta t.$$

Führt man diesen Wert von T in die Formel (146), resp. (147) und (142), ein, so kann man δt als eine vierte Unbekannte, die aus allen Beobachtungsdaten selbst zu ermitteln ist, auffassen.

Da aber, wie wir gesehen haben (siehe die Tabellen III — XI), die Herdtiefe einen verhältnismässig kleinen Einfluss auf die Laufzeit für weiter entfernte Stationen hat und da ausserdem die beobachteten Zeitmomente t' höchstens bis auf eine Sekunde genau sind, so können wir, um nicht eine vierte Unbekannte einzuführen, was kaum zweckmässig wäre, einfach die Korrektion δt vernachlässigen und $t_0 = (t_0)_0$ setzen.

Bringen wir nun den Wert von u aus der Formel (147) in die Gleichung (142) ein, so ergibt sich schliesslich für die drei Unbekannten $\delta\xi$, $\delta c = \delta\eta$ und $\delta\zeta$ folgende definitive lineare Gleichung:

$$a\,\delta\xi + b\,\delta\eta + c\,\delta\zeta = m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (148)$$

wo die Koeffizienten folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2z^2 G_1 - sH_1 \\ b &= 2z^2 G_2 - sH_2 \\ c &= 2z^2 \{2C_0^2 \sin^2 e_0 - s\} \\ m &= \tfrac{1}{2} s^2 - 2C_0^2 \sin^2 e_0 z^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (149)$$

wenn zur Vereinfachung

$$s = H_0 + z^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (150)$$

gesetzt wird.

Die Gleichung (148) bildet eben die Grundlage zur Bestimmung der Herdtiefe eines Bebens und der Ausbreitungsgeschwindigkeit der longitudinalen seismischen Wellen in den verschiedenen oberen Erdschichten.

Diese Methode beruht auf einem Näherungsverfahren.

Man nimmt zuerst drei angenäherte Werte von x_1, c und v_0, nämlich $(x_1)_0$, c_0 und $(v_0)_0$ an, und berechnet dann nach den früher angegebenen Formeln für verschiedene gegebene Epizentralentfernungen ϑ die Werte der Koeffizienten a, b, c und m, die in der Gleichung (148) auftreten. Diese Rechnungen sind ziemlich umständlich und zeitraubend, aber sie lassen sich doch durchführen.

Dann erhält man eine Reihe linearer Gleichungen mit drei Unbekannten $\delta\xi$, $\delta\eta = \delta c$ und $\delta\zeta$, die man nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln kann.

Am bequemsten wird man in der Praxis folgendermaassen verfahren.

Man teile alle Beobachtungsdaten in zwei Gruppen; die erste mit kleinen Epizentralentfernungen uud die zweite mit grösseren.

Da für grössere Epizentralentfernungen der Einfluss der Herdtiefe auf die absolute Laufzeit T sich wenig geltend macht, kann man in den entsprechenden Gleichungen das erste Glied $a\delta\xi$ vernachlässigen. Dann hat man nur zwei Unbekannte $\delta\eta$ und $\delta\zeta$, die man nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Man findet also die Werte von c und v_0 (zweite Näherungswerte).

Bringt man nun die schon ermittelten Werte von $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ in die erste Gruppe von Gleichungen für kleine Epizentralentfernungen ein, so tritt in ihnen schon nur eine Unbekannte $\delta\xi$ auf. Ermittelt man dasselbe, so findet man den gesuchten Wert von h.

Man kann dann $\delta\xi$ in die erste Gruppe einsetzen und $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ nochmals bestimmen u. s. w.

Alsdann kann man mit den neuen Werten von h, c und v_0, wenn nötig, die Koeffizienten a, b, c und m nochmals bestimmen und die früheren Rechnungen wiederholen. Es ist allerdings eine lange Arbeit, die jedoch, wenn die Beobachtungen genügend genau wären, zum Ziele führen würde.

Nach Aufstellung dieser allgemeinen Gleichungen, wollen wir dieselben auf das Süd-Deutsche Erdbeben vom 16. November 1911, für welches ein reiches und ziemlich zuverlässiges Beobachtungsmaterial für viele Stationen vorliegt, anwenden.

Dasselbe wurde mir in liebenswürdiger Weise von Prof. Hecker in Strassburg i. E. zur Verfügung gestellt.

Zunächst muss man die Lage des Epizentrums selbst feststellen.

Am besten wäre es, dieselbe auf Grund makroseismischer Daten aufzufinden. Dies ist aber keineswegs eine einfache Sache und ich werde lieber darauf verzichten.

Man ermittelt gewöhnlich die Epizentren aus den Epizentralentfernungen für verschiedene Stationen. Diese Epizentralentfernungen werden aber auf Grund der Laufzeitkurven für T' abgeleitet. Diese Methode darf man jedoch nicht in diesem Falle, da die Δ verhältnismässig klein sind, anwenden, weil die Form und Lage der Laufzeitkurve, wie wir es früher gesehen haben, von der Herdtiefe selbst abhängig ist.

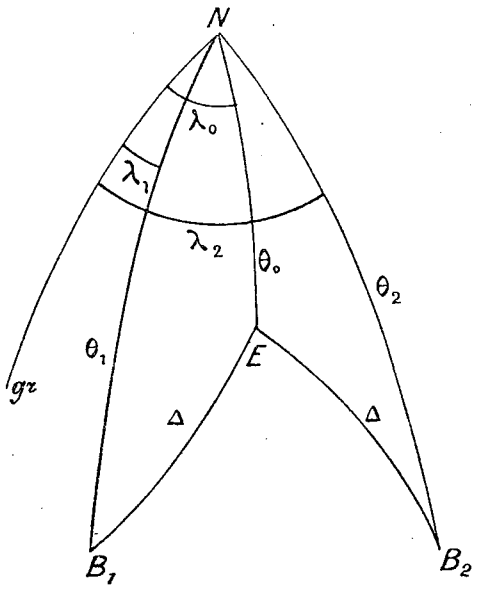
Glücklicherweise lässt sich gerade bei diesem Beben die Lage des Epizentrums, natürlich immer als Mitte des Epizentralgebietes aufgefasst, *ganz unabhängig von der Form der Laufzeitkurve* auffinden.

Die Beobachtungen haben nämlich genau dieselben Momente des Ein-

treffens der ersten Vorläufer P für zwei Paare Stationen ergeben, nämlich für Strassburg — Zürich und Aachen — Göttingen.

Wenn aber P für zwei Stationen dasselbe ist, kann man die Lage eines grossen Kreises, auf welchem das Epizentrum liegt, bestimmen. Hat man zwei Paare solcher Stationen, so lässt sich die Lage des Epizentrums, als Schnittpunkt der entsprechenden zwei grossen Kreise, feststellen, ohne irgend welche Laufzeitkurven zur Hilfe zu nehmen. Selbstverständlich müssen dazu die betreffenden Stationen günstig gelegen sein, was in diesem Fall gerade zutraf.

Fig. 9.



Die entsprechenden Formeln lassen sich leicht aufstellen.

Auf der folgenden Fig. 9 bedeute N den Nordpol, B_1 und B_2 zwei Beobachtungsorte, die die gleichen P, folglich auch die gleichen Δ ergeben haben. E sei das Epizentrum und N—Gr. der Meridian von Greenwich.

Die Länge und das Komplement der Breite für diese drei Orte wollen wir folgendermaassen bezeichnen:

$$B_1 \ldots\ldots\ldots \lambda_1, \theta_1$$
$$B_2 \ldots\ldots\ldots \lambda_2, \theta_2$$
$$E \ldots\ldots\ldots \lambda_0, \theta_0.$$

Aus den Dreiecken NB_1E und NB_2E ergibt sich nun

$$\cos\Delta = \cos\theta_1 \cos\theta_0 + \sin\theta_1 \sin\theta_0 \cos(\lambda_0 - \lambda_1)$$

und

$$\cos\Delta = \cos\theta_2 \cos\theta_0 + \sin\theta_2 \sin\theta_0 \cos(\lambda_0 - \lambda_2).$$

Δ ist freilich unbekannt, aber es lässt sich aus den beiden früheren Gleichungen eliminieren.

Man erhält also

$$(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\cos\theta_0 + \sin\theta_1 \sin\theta_0 \{\cos\lambda_0 \cos\lambda_1 + \sin\lambda_0 \sin\lambda_1\}$$
$$- \sin\theta_2 \sin\theta_0 \{\cos\lambda_0 \cos\lambda_2 + \sin\lambda_0 \sin\lambda_2\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen θ_0 und λ_0 dar. Sie

gibt den Ort aller derjenigen Punkte auf der Erdoberfläche an, welche von den beiden Punkten B_1 und B_2 gleich entfernt sind.

Dividieren wir diese Gleichung durch $\cos\theta_0$ und setzen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta_0 \cos\lambda_0 &= x \\ \operatorname{tg}\theta_0 \sin\lambda_0 &= y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (151)$$

Dann bekommt man

$$\{\sin\theta_2\cos\lambda_2 - \sin\theta_1\cos\lambda_1\}\, x + \{\sin\theta_2\sin\lambda_2 - \sin\theta_1\sin\lambda_1\}\, y$$
$$= 2\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (152)$$

Für ein anderes Paar Stationen mit den Koordinaten θ_1', λ_1' und θ_2', λ_2' erhält man in ähnlicher Weise

$$\{\sin\theta_2'\cos\lambda_2' - \sin\theta_1'\cos\lambda_1'\}\, x + \{\sin\theta_2'\sin\lambda_2' - \sin\theta_1'\sin\lambda_1'\}\, y$$
$$= 2\sin\frac{\theta_2'+\theta_1'}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2'-\theta_1'}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (153)$$

Aus diesen beiden Gleichungen (152) und (153) ergeben sich die beiden Unbekannten x und y.

Wenn diese schon ermittelt sind, erhält man sofort aus den Beziehungen (151) die gesuchten Werte von θ_0 und λ_0.

Es wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta_0 &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\lambda_0 &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (154)$$

Nun sind die geographischen Koordinaten der betreffenden Stationen die folgenden:

Strassburg.	*Zürich.*
$\varphi_1 = 48^\circ\,35'\;\;5'' N$	$\varphi_2 = 47^\circ\,22'\;\;7'' N$
$\lambda_1 = \;\;7\;\;45\;\;57\;\; E$	$\lambda_2 = \;\;8\;\;34\;\;50\;\; E$
$\theta_1 = 41\;\;24\;\;55$	$\theta_2 = 42\;\;37\;\;53$

Aachen.	*Göttingen.*
$\varphi_1' = 50^\circ\,45'\,55'' N$	$\varphi_2' = 51^\circ\,33' N$
$\lambda_1' = \;\;6\;\;\;4\;\;48\;\; E$	$\lambda_2' = \;\;9\;\;58\;\; E$
$\theta_1' = 39\;\;14\;\;\;5$	$\theta_2' = 38\;\;27$

Mit diesen Werten findet man nach den eben angeführten Formeln folgende Werte für die geographischen Koordinaten des Epizentrums

$$\varphi_0 = 48^\circ 19' N$$

$$\lambda_0 = 9^\circ 23 E.$$

Diese Koordinaten stimmen sehr gut mit denjenigen, welche Zeissig und Schmidt (nach einer brieflichen Mitteilung von Hecker) angeben, überein, nämlich gibt

Zeissig.	*Schmidt.*
$\varphi_0 = 48^\circ,3 N$	$\varphi_0 = 48^\circ 16' N$
$\lambda_0 = 9,3 E$	$\lambda_0 = 9\ 10 E.$

Der Vorteil der hier beschriebenen Methode der Bestimmung von φ_0 und λ_0 besteht auch darin, dass man auf diese Weise direkt die Lage desjenigen Punktes bestimmt, aus welchem der erste Hauptimpuls ausgegangen ist.

Nachdem ich die Lage des Epizentrums dieses Bebens festgestellt habe, habe ich für alle diejenigen verhältnismässig nahe liegenden Stationen, für welche mir die Momente des Eintreffens der ersten Vorläufer zur Verfügung standen, die entsprechenden Epizentralentfernungen Δ berechnet und die zugehörigen Laufzeiten auf ein Koordinatennetz aufgetragen.

Es erwies sich dabei, dass nur eine gewisse Anzahl dieser Punkte einer und derselben gleichmässig verlaufenden Kurve sich anschmiegten. Die anderen lagen sicherlich zu hoch oder zu niedrig und ich sah mich deshalb genötigt die entsprechenden Daten einfach auszuschliessen.

Die übrig gebliebenen Stationen habe ich dann in zwei Gruppen geteilt. Die erste Gruppe enthielt diejenigen Stationen, für welche die Epizentralentfernungen $\Delta < 250$ Klm., und die zweite, wo $\Delta > 350$ Klm. waren.

Im Ganzen habe ich die Daten von 17 verschiedenen Stationen verwendet, die weiter unten mit den entsprechenden Momenten von $P(t')$ angegeben sind.

Als angenäherte Ausgangswerte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen seismischen Wellen habe ich die früher angegebenen Werte von Zöppritz und Geiger zu Grunde gelegt, nämlich

$$(v_0)_0 = 7,17 \text{ Klm./Sec.}$$

und

$$v_{100} = 7,60 \text{ Klm./Sec.},$$

woraus

$$c_0 = 3{,}529$$

sich ergibt.

I Gruppe.

Stationen.	φ	λ	ϑ	Δ	$P(t')$
Biberach	48° 5′36″ N	9°47′32″ E	0°21′ 8″	39 Klm.	$21^h25^m59^s$
Karlsruhe.	48 59 46	8 28 55	0 54 13	101	— 26 7
Zürich	47 22 7	8 34 50	1 5 25	121	— — 10
Strassburg i. E. . .	48 35 5	7 45 57	1 6 21	123[1]	— — 10
Heidelberg	49 23 56	8 43 15	1 10 0	130	— — 12
Jugenheim	49 45,5	8 38,7	1 31 14	169	— — 18
Frankfurt a. M. . .	50 13 —	8 27 —	1 59 43	222	— — 22
Neuchâtel.	46 59 51	6 57 29	2 5 58	233	— — 23

II Gruppe.

Stationen.	φ	λ	ϑ	Δ	$P(t')$
Aachen	50°45′55″ N	6° 4′48″ E	3°15′14″	362 Klm.	$21^h26^m42^s$
Göttingen	51 33 —	9 58 —	3 15 20	362	— — 42
Bochum	51 29 28	7 13 52	3 27 49	385	— — 45
Triest	45 38,6	13 46 21	4 0 46	446	— — 55
Laibach	46 3 —	14 31 —	4 9 34	463	— — 58
Graz	47 4,6	15 27 —	4 15 58	474	— 27 1
Wien	48 14 53	16 21 42	4 38 34	516	— — 6
Agram	45 48 54	15 58 32	5 8 14	571	— — 8
Krakau	50 4	19 58 —	7 7 40	793	— — 42

[1]) Infolge der Abrundung der Zahlen für die geographischen Koordinaten des Epizentrums sind die Werte von Δ für Strassburg und Zürich nicht völlig identisch.

Als angenäherten Wert für die Herdtiefe habe ich

$$h_0 = 5 \text{ Klm.}$$

genommen, woraus folgt

$$(x_1)_0 = 0{,}99843.$$

Um die absoluten Laufzeiten T auf Grund der gegebenen Momente t' für alle Stationen zu bestimmen, muss man den Moment t_0 des Anfanges der Bewegung im Herde selbst kennen.

Indem ich die oben angegebenen Werte von $(v_0)_0$, c_0 und $(x_1)_0$ zu Grunde legte, berechnete ich nach der früher angeführten Formel (vergl. die Gleichung (96)) die absolute Laufzeit für Karlsruhe, Zürich und Strassburg und zog dieselbe von dem entsprechenden Moment t' ab.

Dann ergaben sich für t_0 folgende Werte:

	t_0
	$21^h\,25^m\,52^s{,}9$
	— — 52,2
	— — 52,6
Im Mittel	$52^s{,}57$

Hätte man eine etwas grössere Herdtiefe angenommen, so würde dies den entsprechenden Moment t_0 recht wenig beeinflusst haben. (Man vergleiche die Tabellen IV und V).

Für t_0 habe ich endgültig angenommen

$$t_0 = 21^h\,25^m\,52^s{,}5,$$

was in Anbetracht der möglichen Fehler, mit welchen die einzelnen Werte von P behaftet sind, als völlig genügend genau zu betrachten ist.

Legt man also diesen Wert von t_0 zu Grunde, so berechnen sich die einzelnen absoluten Laufzeiten T für alle 17 Stationen einfach nach der Beziehung

$$T = t' - t_0.$$

Man erhielt also eine Anzahl zusammengehöriger Werte von ϑ und T, aus welchen man, bei Zugrundelegung der früher angenommenen drei Konstanten, alle in den früher entwickelten Differentialformeln auftretenden Koeffizienten berechnen konnte.

Bei der zweiten Gruppe von Stationen wurde der Einfluss der Korrektion für die Herdtiefe ($\delta\xi$) vernachlässigt.

Dann ergibt sich gemäss der Beziehung (148) eine Reihe linearer Gleichungen von der folgenden Form:

$$b\,\delta\eta + c\,\delta\zeta = m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (155)$$

mit zwei Unbekannten $\delta\eta$ und $\delta\zeta$.

Die Beobachtungsdaten für etwas weiter entfernte Stationen sind zur Bestimmung beider Grössen $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ gerade günstig.

Die Rechnungen haben nun folgende Werte für die Logarithmen der in den Gleichungen (155) auftretenden Koeffizienten ergeben:

II Gruppe.

Δ	Log b	Log c	Log m
362 Klm.	$\bar{7}$,40705 (n)	$\bar{4}$,16908 (n)	$\bar{6}$,36324 (n)
362	$\bar{7}$,38003 (n)	$\bar{4}$,16908 (n)	$\bar{6}$,36324 (n)
385	$\bar{7}$,53958 (n)	$\bar{4}$,26950 (n)	$\bar{6}$,55023 (n)
446	$\bar{7}$,98105 (n)	$\bar{4}$,59925 (n)	$\bar{6}$,58320
463	$\bar{6}$,08856 (n)	$\bar{4}$,69011 (n)	$\bar{6}$,98632
474	$\bar{6}$,14762 (n)	$\bar{4}$,78365 (n)	$\bar{5}$,34674
516	$\bar{6}$,33264 (n)	$\bar{4}$,89647 (n)	$\bar{5}$,30899
571	$\bar{6}$,49693 (n)	$\bar{4}$,87739 (n)	$\bar{5}$,59162 (n)
793	$\bar{5}$,39023 (n)	$\bar{3}$,57201 (n)	$\bar{5}$,34635

Auf Grund dieser Zahlen berechnen sich aus den Gleichungen (155) nach der Methode der kleinsten Quadrate folgende Werte für $\delta\eta$ und $\delta\zeta$, nämlich

$$\delta\eta = +1{,}104$$

und

$$\delta\zeta = -0{,}01225.$$

Für die erste Gruppe von Stationen muss man schon die Gleichungen (148) anwenden, in welchen $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ schon als bekannte Grössen anzusehen sind.

$$a\,\xi = m - b\,\delta\eta - c\,\delta\zeta = m' \ldots\ldots\ldots\ldots (156)$$

Die Rechnungen haben für die Logarithmen der in diesem Gleichungssystem auftretenden Koeffizienten folgende Werte ergeben:

I Gruppe.

Δ	Log a	Log b	Log c	Log m
39 Klm.	$\bar{4},95328$	$\bar{7},22324(n)$	$\bar{6},41134$	$\bar{7},56820(n)$
101	$\bar{4},23805$	$\bar{8},40654(n)$	$\bar{7},90709$	$\bar{8},30103(n)$
121	$\bar{4},24551$	$\bar{8},65514(n)$	$\bar{7},69045(n)$	$\bar{9},77815(n)$
123	$\bar{4},01703$	$\bar{8},34439(n)$	$\bar{7},71190(n)$	$\bar{9},77815$
130	$\bar{4},59770$	$\bar{8},87679(n)$	$\bar{6},30510(n)$	$\bar{7},02119$
169	$\bar{4},61278$	$\bar{8},92065(n)$	$\bar{5},00828(n)$	$\bar{7},79239$
222	$\bar{4},37840(n)$	$\bar{8},35984$	$\bar{5},20086(n)$	$\bar{7},91960(n)$
233	$\bar{4},51055(n)$	$\bar{8},54900$	$\bar{5},24522(n)$	$\bar{6},13386(n)$

Auf Grund dieser Zahlenwerte ergibt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate aus dem Gleichungssystem (156)

$$\delta\xi = +0{,}0006993.$$

Nun ist nach der Beziehung (29)

$$\delta h = r_0 \delta\xi,$$

also

$$\delta h = +4{,}5 \text{ Klm.}$$

und

$$h = h_0 + \delta h,$$

also

$$\underline{h = 9{,}5 \text{ Klm.}}$$

mit einem mittleren Fehler von $\pm 3{,}8$ Klm.

Der wahrscheinlichste Wert der Herdtiefe des Süd-Deutschen Bebens vom 16. November 1911 ist also gleich 9,5 Klm., welches Resultat vom geologischen Standpunkt aus wohl als ganz plausibel erscheinen mag.

Weiter ergibt sich

$$\delta\eta = \delta c = +1{,}104$$

oder

$$c = c_0 + \delta c = 4{,}633$$

und nach der Beziehung (145)

$$\delta v = (v_0)_0 \, \delta\zeta = -0{,}088,$$

also

$$v_0 = (v_0)_0 + \delta v = 7{,}08 \, {}^{\text{Klm.}}/_{\text{Sec.}}.$$

Diese Zahl weicht recht wenig von der von Zöppritz und Geiger gegebenen, nämlich $v_0 = 7{,}17$, ab.

c hat sich grösser ergeben, als ursprünglich angenommen wurde, aber ein solcher ziemlich grosser Zuwachs von c übt, wie wir gleich sehen werden, einen recht kleinen Einfluss auf die angenommene Fortpflanzungsgeschwindigkeit in 100 Kilometer Tiefe aus.

Bedeute nun h' irgend welche Tiefe; der entsprechende Wert von x sei x', und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dieser Tiefe v. Dann ergibt sich nach den Beziehungen (29) und (30)

$$x' = \left(1 - \frac{h'}{r_0}\right)^2.$$

Nun ist nach den Formeln (31), (34) und (8)

$$\nu^2 = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 = 1 - c(1 - x') = 1 - 2c \, \frac{h'}{r_0}\left(1 - \frac{1}{2} \, \frac{h'}{r_0}\right),$$

also

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 - 2c \, \frac{h'}{r_0}\left\{1 - \frac{1}{2} \, \frac{h'}{r_0}\right\}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (157)$$

Setzt man hierin den neuen Wert von $c = 4{,}633$ und $h' = 100$, so erhält man

$$v_{100} = 7{,}65 \, {}^{\text{Klm.}}/_{\text{Sec.}},$$

während Zöppritz und Geiger $v_{100} = 7{,}60$ angegeben haben.

Wir haben also für unsere Rechnungen als erste Näherungswerte angenommen

$$h_0 = 5 \text{ Klm.}, \quad (v_0)_0 = 7{,}17, \quad (v)_{100} = 7{,}60$$

und nach den Rechnungen gefunden

$$h = 9{,}5 \text{ Klm.}, \quad v_0 = 7{,}08 \quad \text{und} \quad (v)_{100} = 7{,}65.$$

Mit diesen neuen Werten könnte man eigentlich die früheren Rechnungen wiederholen, dies würde aber sich kaum lohnen, da die beobachte-

ten Momente P keine solche Genauigkeit besitzen, dass man auf diesem Wege ein erheblich besseres Resultat zu erzielen hoffen dürfte.

Ueberhaupt ist die Bestimmung der Herdtiefe aus den beobachteten Laufzeiten eine recht delikate und schwere Aufgabe, die recht vertrauenswerte Beobachtungsdaten erfordert. Es würden dazu eigentlich die Zehntel Sekunden in den Momenten von P nötig sein, aber eine solche Genauigkeit ist bei dem jetzigen Stand der Präzisionsseismometrie nicht zu erzielen.

Es handelt sich bei dieser Untersuchung eigentlich nicht um eine *genaue* Bestimmung der Herdtiefe des betreffenden Bebens, was mit dem mir zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterial kaum möglich wäre, sondern eher darum, ihre *Grössenordnung* festzustellen.

Die früheren Untersuchungen über dieses Gebiet haben nämlich für die Herdtiefe verschiedener Beben Werte geliefert, die zwischen sehr weiten Grenzen schwankten, und man hatte dabei eigentlich kein Kriterium zur Beurteilung, inwieweit die erhaltenen Resultate Vertrauen verdienten.

Im jetzigen Fall haben wir aber aus unseren Gleichungen nicht nur h, sondern auch den mittleren Fehler von h abgeleitet, woraus man wohl schliessen darf, dass der Herd des Süd-Deutschen Bebens vom 16. November 1911 etwa zwischen 5,5 und 13,5 Kilometer Tiefe sich befand.

Wir können noch die Formel (157) verwenden, um die Ausbreitungsgeschwindigkeit der longitudinalen seismischen Wellen in verschiedenen Tiefen h' zu berechnen. Die entsprechenden Resultate sind in der folgenden Tabelle XVI zusammengestellt.

Diese Tabelle zeigt, dass zwischen den gegebenen Grenzen für h' die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen v von der Tiefe h' praktisch fast genau eine lineare ist.

Wir sehen auch, dass nach dieser Untersuchung die Geschwindigkeit v mit der Tiefe etwas rascher zunimmt, als bis jetzt angenommen wurde, eine Tatsache, auf welche schon Wiechert aufmerksam gemacht hat, obgleich die Werte von v für $h' = 0$ und $h' = 100$ recht wenig von den Zöppritz — Geiger'schen Zahlen abweichen.

Diese ganze Untersuchung zeigt in deutlicher Weise, mit welchen Schwierigkeiten eine einigermaassen genaue Bestimmung der Herdtiefe eines Bebens verknüpft ist, da dieselbe recht genaue Laufzeiten (bis auf Zehntel Sekunde) erfordert.

Ueberhaupt ist die Methode der Laufzeiten viel weniger zur Bestimmung der Herdtiefe geeignet, als die Methode, welche auf den beobachteten Emergenzwinkeln beruhen würde, um aber diese Grössen heranzuziehen, dazu fehlt noch zur Zeit das nötige Beobachtungsmaterial.

Tabelle XVI.

h'	v	v (nach Zöppritz und Geiger).
0 Klm.	$7{,}08\ \frac{\text{Klm.}}{\text{Sec.}}$	$7{,}17\ \frac{\text{Klm.}}{\text{Sec.}}$
10	7,13	
20	7,19	
30	7,24	
40	7,29	
50	7,35	
60	7,41	
70	7,47	
80	7,53	
90	7,59	
100	7,65	7,60
	$v_{100} - v_0 = 0{,}57\ \frac{\text{Klm.}}{\text{Sec.}}$ $c = 4{,}633$	$v_{100} - v_0 = 0{,}43\ \frac{\text{Klm.}}{\text{Sec.}}$ $c = 3{,}529$

Zum Schluss mag nochmals darauf aufmerksam gemacht werden, dass für kleine Epizentralentfernungen die Form und Lage der Laufzeitkurven für die Laufzeiten T' vom Epizentrum aus gerechnet von der betreffenden Herdtiefe ziemlich stark abhängig sind, und diesen Umstand darf man keineswegs bei verschiedenen diesbezüglichen Untersuchungen ausser Acht lassen.

Anmerkung bei der Korrektur.

Während des Druckes dieser Abhandlung ist der Aufsatz von Schmidt «Zur Herdtiefe des süddeutschen Erdbebens vom 16. November 1911» (Beiträge zur Geophysik, Bd. XII, Heft. 1, p. 1) erschienen.

Durch paarweise Kombination von Stationen sucht Schmidt den kleinsten Wert der «scheinbaren» Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen längs der Erdoberfläche $\frac{d\Delta}{dT}$ auf, welchen wir mit v_m bezeichnen wollen. Diese Geschwindigkeit entspricht dem Inflexionspunkt der betreffenden Laufzeitkurve, wo also der Emergenzwinkel ein Minimum wird. Dieser Punkt befinde sich in einer Entfernung Δ_m vom Epizentrum. Schmidt findet Δ_m=460 Klm. und v_m=7,1 Klm./Sec..

Bedeute nun v_0 die wahre Ausbreitungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in den aller obersten Erdschichten, so findet Schmidt durch eine sehr einfache geometrische Konstruktion, unter Annahme einer kreisförmigen Gestalt der Bahn der seismischen Strahlen und unter Vernachlässigung der Krümmung der Erdoberfläche, folgende sehr einfache Formel für

die gesuchte Herdtiefe h:

$$h = \Delta_m \sqrt{\frac{v_m - v_0}{v_m + v_0}}.$$

Für v_0 nimmt Schmidt 5,5 Klm./Sec., resp. 6,0 Klm./Sec. an und findet für h 164, resp. 133 Klm.

Diese angenommenen Werte für v_0 sind sicherlich zu klein; deshalb ergaben sich auch solche grossen Herdtiefen. Würde man für v_0 denjenigen Wert wählen, welcher sich aus dieser Untersuchung ergeben hat, nämlich $v_0 = 7{,}08$ Klm./Sec., so würde h nur 17,3 Klm. sein. Es ist nur in diesem Fall nötig für v_m 7,086 statt 7,10 zu nehmen, damit h sich gleich 9,5 Klm. ergebe.

Die von Schmidt angewandte Methode lässt, wie wir sehen, keine grosse Genauigkeit in der Berechnung von h zu, da die Bestimmung des wahren Wertes der kleinsten «scheinbaren» Geschwindigkeit v_m bei den meistens zu ungenauen Beobachtungsergebnissen sehr grosse Schwierigkeiten darbietet. Ausserdem erfordert sie eine sehr genaue Kenntnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_0 der longitudinalen seismischen Wellen in den aller obersten Erdschichten.

Графическій способъ опредѣленія величинъ x_m и $(\delta + \delta_1)$ при гальванометрической регистраціи.

Е. Бюсъ.

Въ случаѣ примѣненія аперіодическихъ маятниковъ системы князя Б. Б. Голицына съ гальванометрической регистраціей истинныя максимальныя смѣщенія почвы опредѣляются по формулѣ [1])

$$x_m = C_1 (1 + n_1^2)(1 + u^2) \sqrt{1 - \mu^2 f(u)} \cdot \frac{y_m}{T_p}, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ

$$u = \frac{T_p}{T}, \quad u_1 = \frac{T_p}{T_1}, \quad f(u) = \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2,$$

$C_1 = \frac{\pi l}{k A_1}$, μ^2, T, T_1 — заранѣе опредѣленныя постоянныя сейсмографа

T_p — періодъ данной сейсмической волны

y_m — ея максимальная амплитуда на сейсмограммѣ.

Приведеніе наблюденнаго момента t_m (на сейсмограммѣ) къ моменту t_{xm} истиннаго смѣщенія почвы складывается изъ двухъ разностей фазъ:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{T_p}{2\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2-1} \right\} \\ \tau_1 &= T_p \left[\frac{\operatorname{arc\,tg} \left\{ \frac{2u_1}{u_1^2-1} \right\}}{2\pi} + \frac{1}{4} \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

---

[1]) Fürst B. Galitzin. Ueber ein neues aperiodisches Horizontalpendel etc... St.-Petersburg 1911. Pag. 35 und 107.

Положивъ для краткости

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\left\{\sqrt{1-\mu^2}\cdot\frac{2u}{u^2-1}\right\}=\delta$$

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{2u_1}{u_1^2-1}\right\}+\frac{1}{4}=\delta_1$$

имѣемъ

$$\tau+\tau_1=(\delta+\delta_1)\,T_p.$$

Вычисленіе по формуламъ (1) и (2) многимъ упрощается, если пользоваться таблицами вспомогательныхъ величинъ, помѣщенныхъ въ сборникѣ «Seismometrische Tabellen» кн. Б. Б. Голицына.

Нами примѣняется на Бакинской сейсмической станціи взамѣнъ вторичныхъ контрольныхъ вычисленій пріемъ, позволяющій найти x_m и $(\delta+\delta_1)$ графически и въ большинствѣ случаевъ съ достаточной точностью. Прежде чѣмъ перейти къ его изложенію, преобразуемъ нѣсколько формулы (1) и (2). Если положить

$$u_1=\frac{T_p}{T_1}=\operatorname{tg}\psi,\quad u=\frac{T_p}{T}=\operatorname{tg}\varphi,\quad h=\sqrt{1-\mu^2},$$

то скобочные множители выраженія (1) представятся въ такомъ видѣ:

$$1+u_1^2=\sec^2\psi,\quad 1+u^2=\sec^2\varphi$$

$$f(u)=\left[\frac{2u}{1+u^2}\right]^2=\sin^2 2\varphi$$

$$\sqrt{1-\mu^2 f(u)}=\frac{h\sin 2\varphi}{\sin\alpha},$$

гдѣ

$$\operatorname{tg}\alpha=h\operatorname{tg}2\varphi.$$

Для x_m послѣ нѣкоторыхъ преобразованій имѣемъ:

$$x_m=\frac{C_1 h}{T}\cdot\frac{2y_m}{\cos^2\psi\,\sin\alpha}.$$

C_1, h и T — величины постоянныя; обозначивъ, поэтому,

$$1000\,\frac{C_1 h}{T}=C_2,$$

получимъ для x_m (въ микронахъ)

$$x_m=\frac{C_2}{\cos^2\psi\cdot\sin\alpha}\cdot 2y_m=C_2\sec^2\psi\cdot\operatorname{cosec}\alpha\cdot 2y_m$$

Выраженія для поправокъ τ и τ_1 можно переписать въ видѣ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\tau}{T_p}\right) = h\,\frac{2u}{u^2-1} = \operatorname{tg}(\pi-\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tau_1}{T_p}-\frac{1}{4}\right)2\pi = \frac{2u_1}{u_1{}^2-1} = \operatorname{tg}(\pi-2\psi),$$

откуда

$$\frac{2\pi\tau}{T_p} = \pi-\alpha, \quad 2\pi\left(\frac{\tau_1}{T_p}-\frac{1}{4}\right) = \pi-2\psi$$

или

$$\tau = \left(0.5-\frac{\alpha}{2\pi}\right)T_p, \quad \tau_1 = \left(0.75-\frac{2\psi}{2\pi}\right)T_p$$

и

$$\tau+\tau_1 = \left(1.25-\frac{\alpha+2\psi}{2\pi}\right)T_p = \left[1.25-\frac{\alpha^\circ+2\psi^\circ}{360}\right]T_p$$

Изъ окончательнаго сопоставленія:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{T_p}{T_1} \qquad C_2 = \frac{1000\,C_1\,h}{T}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{T_p}{T}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = h\operatorname{tg}2\varphi \text{ или } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{h}\operatorname{cotg}2\varphi$$

$$x_m = \frac{C_2}{\cos^2\psi\cdot\sin\alpha}\cdot 2y_m \text{ или } x_m = C_2\sec^2\psi\,\operatorname{cosec}\alpha\cdot 2y_m$$

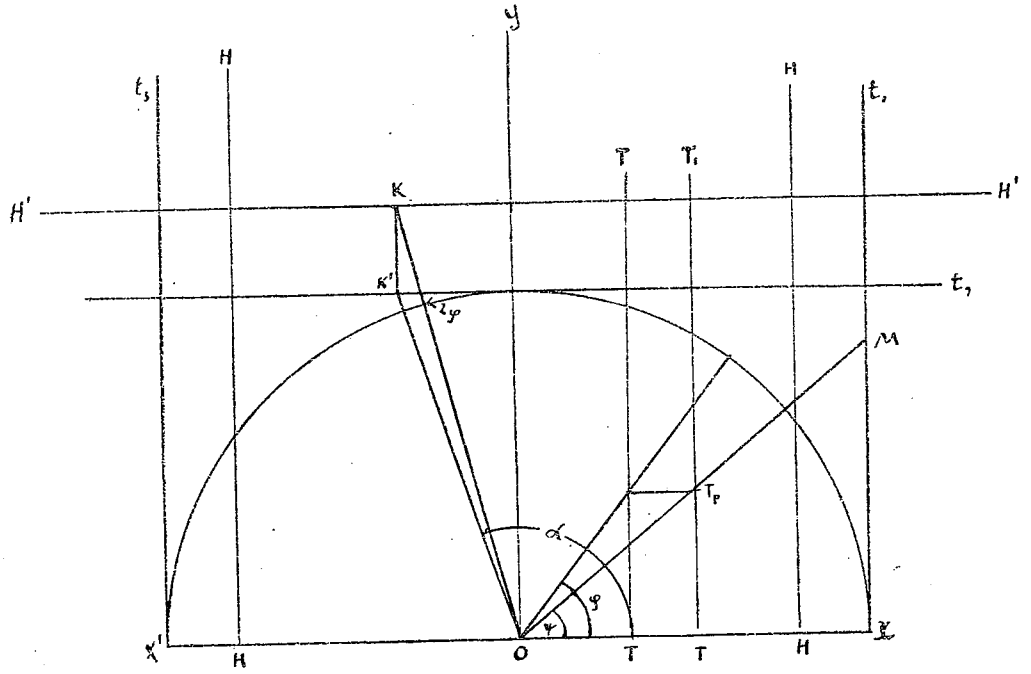
$$\tau+\tau_1 = \left(1.25-\frac{\alpha^\circ+2\psi^\circ}{360}\right)T_p$$

не трудно усмотрѣть графическій способъ опредѣленія нѣкоторыхъ искомыхъ величинъ.

Опишемъ радіусомъ, равнымъ единицѣ, полуокружность съ центромъ въ началѣ прямоугольной системы координатъ. Въ точкахъ (x, y, x') пересѣченія координатныхъ осей съ окружностью проведемъ касательныя t_1, t_2, t_3 къ ней. Изъ точекъ H, расположенныхъ на оси XX' симметрично относительно начала O, на разстояніи равномъ h отъ послѣдней, проведены прямыя HH параллельно оси Y; черезъ точку H', лежащую на OY $\left(OH' = \frac{1}{h}\right)$ — прямая $H'H'$ параллельно XX'. Остается еще провести прямыя TT и T_1T_1 перпендикулярно къ оси XX' изъ точекъ ея съ абсциссами, равными T и T_1. При откладываніи точекъ T, T_1 и T_p (см. ниже) выгоднѣе пользоваться бо́льшимъ масштабомъ — для увеличенія точности результата.

T и T_1 можно разсматривать какъ абсциссы двухъ точекъ, T_p какъ ихъ ординату. Этими точками опредѣлены углы φ и ψ. $\operatorname{Sec}\psi$ $(= OM$, см. черт.)

Черт. 1.



извлекается изъ чертежа непосредственно. Отложивъ изъ точки X въ сторону возрастающихъ угловъ дугу 2φ, проведя соотвѣтствующій радіусъ-векторъ до пересѣченія съ $H'H'$[1]) въ точкѣ K, опустимъ изъ послѣдней перпендикуляръ на касательную t_2. Этимъ опредѣлится точка K', а вмѣстѣ съ тѣмъ и уголъ $\alpha = \angle XOK'$; отрѣзокъ OK' есть $\operatorname{cosec}\alpha$.

Множитель $(\delta + \delta_1)$ удобнѣе представить, какъ сумму трехъ подобныхъ слагаемыхъ:

$$\delta + \delta_1 = 1.25 - \frac{\alpha^\circ + 2\psi^\circ}{360^\circ} = \left[\frac{150^\circ - \alpha^\circ}{360}\right] + \left[\frac{150^\circ - \psi^\circ}{360}\right] + \left[\frac{150^\circ - \psi^\circ}{360}\right].$$

Можно разъ навсегда отмѣтить на окружности точки, соотвѣтствующія значеніямъ слагаемаго $\left[\frac{150^\circ - \theta}{360}\right]$ черезъ опредѣленные его интервалы. На нашемъ оригинальномъ чертежѣ эти значенія отмѣчены не на окружности, а на касательныхъ t_1, t_2, t_3, рядомъ со значеніями $\sec^2\psi$ $(\cos^2\psi)$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ $(\sin\alpha)$. Въ этомъ случаѣ всѣ искомыя величины отсчитываются непосредственно изъ чертежа. При новыхъ постоянныхъ замѣняются только прямыя HH, $H'H'$, TT и T_1T_1 новыми, остальное остается.

Примѣръ. Изложеннымъ пріемомъ были найдены для случая, приведеннаго въ вышеупомянутомъ трудѣ «Ueber ein neues» etc., стр. 109, слѣ-

---

[1]) При маломъ φ радіусъ-векторъ проводится до пересѣченія съ HH, перпендикуляръ опускается на касательную t_1; въ такомъ случаѣ отсчитывается не $\operatorname{cosec}\alpha$, а $\sin\alpha$.

дующія данныя (масштабъ чертежа: $R = 100^{м}/_{м}$):

$$\text{для } M_1 \ldots \begin{cases} T_p = 18^{s}.3 \\ 2y_m = 89.25\,^{м}/_{м}. \end{cases}$$

Изъ чертежа имѣемъ:

$$\sec\psi = 1.261$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = 1.021.$$

По постояннымъ на стр. 110 найдемъ для C_2:

$$\lg C_2 = 9.6110$$

и для опредѣленія x_m имѣемъ

$$\begin{aligned} \lg \sec^2\psi &= 0.2014 \\ \lg \operatorname{cosec}\alpha &= 0.0090 \\ \lg C_2 &= 9.6110 \\ \lg 2y_m &= 1.9506 \\ \hline \lg x_m &= 1.7720 \end{aligned} \qquad x_m = 59^{\mu}.2 \text{ (по вычисл. } 59^{\mu}.4)$$

Далѣе изъ чертежа

$$\begin{aligned} \frac{150-\psi}{360} &= 0.312 \\ \text{»} \quad &= 0.312 \\ \frac{150-\alpha}{360} &= 0.200 \\ \hline \delta + \delta_1 &= 0.824 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg(\delta + \delta_1) &= 9.9159 \\ \lg\ T_p &= 1.2625 \\ \hline \lg(\tau + \tau_1) &= 1.1784 \end{aligned}$$

$$\tau + \tau_1 = 15^{s}.1 \text{ (по вычисл. } 15^{s}.1).$$

Баку. Villa Petrolea.
Сейсмическая станція Э. Л. Нобеля.
Октябрь. 1912 г.