

# Les modes inertiels et gravito-inertiels singuliers

Michel Rieutord

Laboratoire d'Astrophysique

Observatoire Midi-Pyrénées

# Plan

1. Le contexte astrophysique et géophysique
2. Les modes inertiels
3. Les effets de la viscosité
4. Les modes gravito-inertiels

# Le contexte astrophysique : Astérosismologie

Chaque oscillation propre d'un corps est caractérisée par une force de rappel qui nous renseigne sur une quantité physique :

- Onde acoustique : la force de pression :  $c_s$
- Onde de gravité : la force d'Archimède :  $N$
- Onde inertielle : la « force » de Coriolis :  $\Omega$
- Onde d'Alfvén : Tension magnétique :  $V_A$

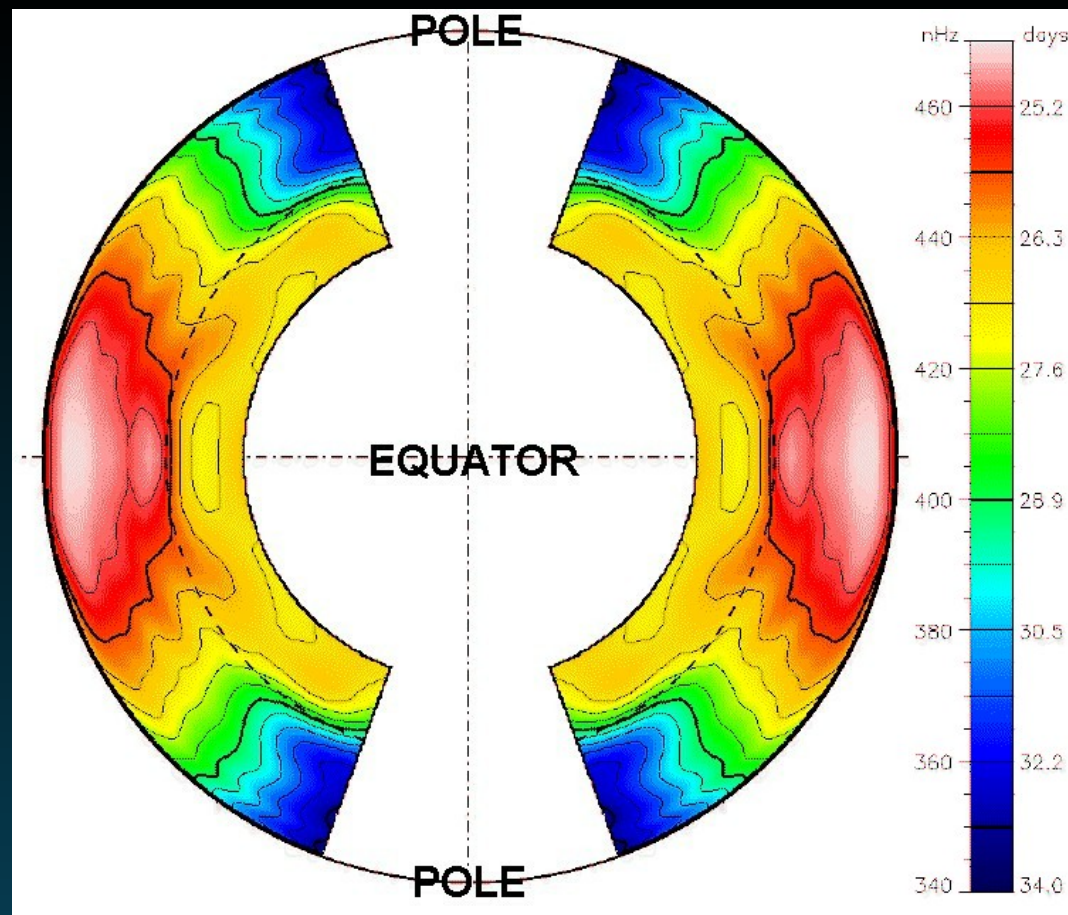


FIG. 1: La rotation interne du soleil vue par les ondes acoustiques.

# Le contexte géophysique

La Terre est un corps mélangé : solide (croûte, manteau et graine) et fluide (noyau liquide).

- Onde acoustique : la force de pression :  $c_s$
- Onde élastique : la force de cisaillement du solide
- Onde de gravité : la force d'Archimède :  $N$
- Onde inertielle : la « force » de Coriolis :  $\Omega$
- Onde d'Alfvén : Tension magnétique :  $V_A$

# Le Noyau fluide

Couche fluide d'un mélange Fer, Nickel et quelques éléments légers, source du magnétisme terrestre, occupant les 2/3 (en rayon) d'une quasi-sphère de 3480 km de rayon.

On aimerait connaître mieux

- son profil de densité  $\rho(r)$
- son profil de fréquence de Brunt-Väisälä
- sa viscosité....

Jusqu'à présent les modèles sismiques de la Terre ont utilisé les seules ondes détectées échantillonnant le noyau, les ondes acoustiques.

Si on détectait d'autres ondes, comme les ondes gravito-inertielles ont accès à la fréquence de Brunt-Väisälä , à la viscosité, à la rotation différentielle etc...

# Les oscillations d'un corps fluide en rotation

Le rôle joué par la rotation :

- Rôle de l'accélération centrifuge
- Rôle de l'accélération de Coriolis



# L'accélération centrifuge

Pas de rôle direct sur l'oscillation : c'est un champ de force supplémentaire qui s'ajoute à celui de la gravité qui devient une gravité effective.

Il n'y a pas d'ondes nouvelles associées à la « force » centrifuge.

Par contre l'accélération centrifuge modifie la configuration d'équilibre :

- Géométrie modifiée (exemple du polytrophe)

Par contre l'accélération centrifuge modifie la configuration d'équilibre :

- Géométrie modifiée (**exemple du polytrophe**)
- Pas d'équilibre hydrostatique strict (écoulement barocline).

Donc des effets indirects complexes...

## L'accélération de Coriolis $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

C'est à travers elle qu'apparaît l'échelle de temps de la rotation.

Lors des premières études des effets de la rotation, on a calculé le "rotational splitting" qui est essentiellement un effet géométrique :

Une onde qui se propage avec la vitesse de phase

$$\pm \frac{\omega}{m}$$

dans le repère lié à l'étoile, a une vitesse phase

$$\Omega \pm \frac{\omega}{m}$$

dans un repère fixe. Autrement dit la fréquence de l'oscillation dans la direction de la ligne de visée est décalée vers les basses ou hautes fréquences d'une quantité proportionnelle à

$$m\Omega$$

d'où la possibilité de mesurer la période de rotation d'une étoile. **Exemple de décalage rotationnel.**

# L'accélération de Coriolis : Effet physique

L'accélération de Coriolis est là pour assurer la conservation du moment cinétique.

Lorsqu'on perturbe un fluide en rotation, le mouvement d'une particule est caractérisé par une oscillation basse fréquence  $[0, 2\Omega]$  appelée **oscillation inertielle** dont l'origine est la conservation du moment cinétique de la particule.

## Avec une équation

$$\rho \left( \frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \right) =$$
$$-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{b} \wedge \vec{B} / \mu_0 + \dots$$



## Les modes inertiels

Ce sont les oscillations d'un fluide en rotation lorsqu'il ne reste plus d'autre force de rappel que la force de Coriolis. Le système le plus simple qui possède ce type de modes propres est le fluide incompressible non visqueux :

$$\begin{cases} i\omega\vec{u} + \vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla}P \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } S \end{cases} \quad (1)$$

## Les modes inertiels : quelques propriétés

Ils sont orthogonaux entre eux :

$$\int_{(V)} \vec{u}_n \cdot \vec{u}_m^* dV = 0 \quad (2)$$

Leur fréquence est toujours plus petite que  $2\Omega$  :

$$|\omega| \leq 2\Omega \frac{\int_{(V)} |\text{Im}[(\vec{u}^* \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e}_z]| dV}{\int_{(V)} |\vec{u}|^2 dV} \leq 2\Omega \quad (3)$$

## L'équation de Poincaré

La perturbation de pression d'un mode inertiel obéit à l'équation :

$$\Delta P - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

dite équation de Poincaré d'après Cartan (1922).

Les conditions aux limites s'expriment alors par :

$$-\omega^2 \vec{n} \cdot \vec{\nabla} P + (\vec{n} \cdot \vec{e}_z)(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} P) + i\omega(\vec{e}_z \wedge \vec{n}) \cdot \vec{\nabla} P = 0 \quad (5)$$

## Un peu de mathématiques...

La spécificité de l'équation de Poincaré est son hyperbolicité dans les coordonnées d'espace :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

Or une équation hyperbolique n'a en général pas de solutions satisfaisant des conditions aux limites (cf équation d'onde).

Le problème est dit mal-posé au sens d'Hadamard :

- Solutions singulières (pas de carré sommable), spectre ponctuel vide (pas de valeurs propres),...
- Singularités associées aux conditions aux limites dites aux dérivées obliques.

## Lorsqu'il existe : le spectre est dense

Si la forme du conteneur est simple on peut calculer le spectre (*i.e.* toutes les fréquences possibles pour  $\omega$ ), on trouve alors que les modes propres sont **denses dans l'intervalle  $[0,1]$**

Pour n'importe quelle valeur dans cet intervalle, il existe un mode dont la fréquence peut en être aussi proche que voulu.

Exemple :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}}, \quad (n, m) \in \mathbb{N}^2$$

est dense dans  $[0,1]$ .



# Rappels

Les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre sont classées en quatre catégories : **hyperbolique**, **parabolique**, **elliptique** ou **mixte**. Cette distinction est basée sur une propriétés des coefficients des opérateurs de dérivation. L'équation la plus générale a la forme suivante :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots = 0$$

La fonction  $D(x, y) = B^2 - 4AC$  détermine le type de l'équation. Si partout dans le domaine de définition de  $f$

- $D(x, y) > 0$  l'équation est hyperbolique.
- $D(x, y) = 0$  l'équation est parabolique.
- $D(x, y) < 0$  l'équation est elliptique.

Si  $D(x, y)$  change de signe dans le domaine l'équation est alors dite de type mixte.

## Exemples :

- l'équation d'onde est de type hyperbolique.
- l'équation de la chaleur de type parabolique
- l'équation d'un potentiel est elliptique

# Conséquences de l'hyperbolicité

- ① Le problème de Poincaré est mal posé au sens d'Hadamard : Un problème hyperbolique est bien posé si les conditions limites sont de type Cauchy, *i.e.* conditions initiales.

Les conditions aux limites sont en générales impossibles à satisfaire avec des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ .

Autre possibilité : la solution n'est pas complètement définie.

Exemple : l'équation d'onde

Tout le monde sait que si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

alors la solution générale de cette équation est :

$$f(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$$

Pour déterminer complètement la solution, il faut dans

ce cas deux conditions limites (initiales) ; si on prend

$$f(x, 0) = \cos x \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_0 = 0$$

il vient

$$f(x, t) = \frac{1}{2} [\cos(x - ct) + \cos(x + ct)]$$

La solution est donc complètement définie.

Imaginons qu'au lieu de cela nous ayons demandé des conditions à deux temps différents par exemple :

$$f(x, 0) = I(x) \quad \text{et} \quad f(x, T) = F(x)$$

$I(x)$  et  $F(x)$  étant données. Dans ce cas le problème est **mathématiquement mal posé**. Sur cet exemple les conditions limites précédentes ne sont pas suffisantes pour définir complètement la solution. On montrera en effet que  $\Psi(x)$  vérifie :

$$\Psi(x) = \Psi(x + 2cT) + F(x + 2cT) - I(x)$$

c'est-à-dire qu'il faut encore se donner  $\Psi(x)$  dans l'in-

tervalle  $[0, 2cT]$  pour déterminer complètement cette fonction.



- ② Un problème mal posé peut faire apparaître des **valeurs propres infiniment dégénérées** ou bien **des fonctions propres discontinues**.

Exemple : le problème de Poincaré dans un rectangle.

On résoud

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{D}$$

La solution classique est  $\psi(x, z) = \sin m\pi x \sin n\pi z$  et

$$\omega_{mn}^2 = \frac{n^2}{m^2 + n^2} \quad (6)$$

Les valeurs propres sont infiniment dégénérées car

$$\omega_{mn} = \omega_{jm,jn} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\psi(x, z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin jm\pi x \sin jn\pi z$$

### ③ Les caractéristiques

Si  $D(x, y) = B^2 - 4AC > 0$ , on peut « factoriser » les termes du second ordre :

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots = 0$$

devient

$$\left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a' \frac{\partial}{\partial x} + b' \frac{\partial}{\partial y} \right) + \dots = 0$$

c'est-à-dire qu'il existe un système de coordonnées  $(u, v)$   
où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \dots = 0$$

et tel que

$$\frac{\partial}{\partial u} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = a' \frac{\partial}{\partial x} + b' \frac{\partial}{\partial y}$$

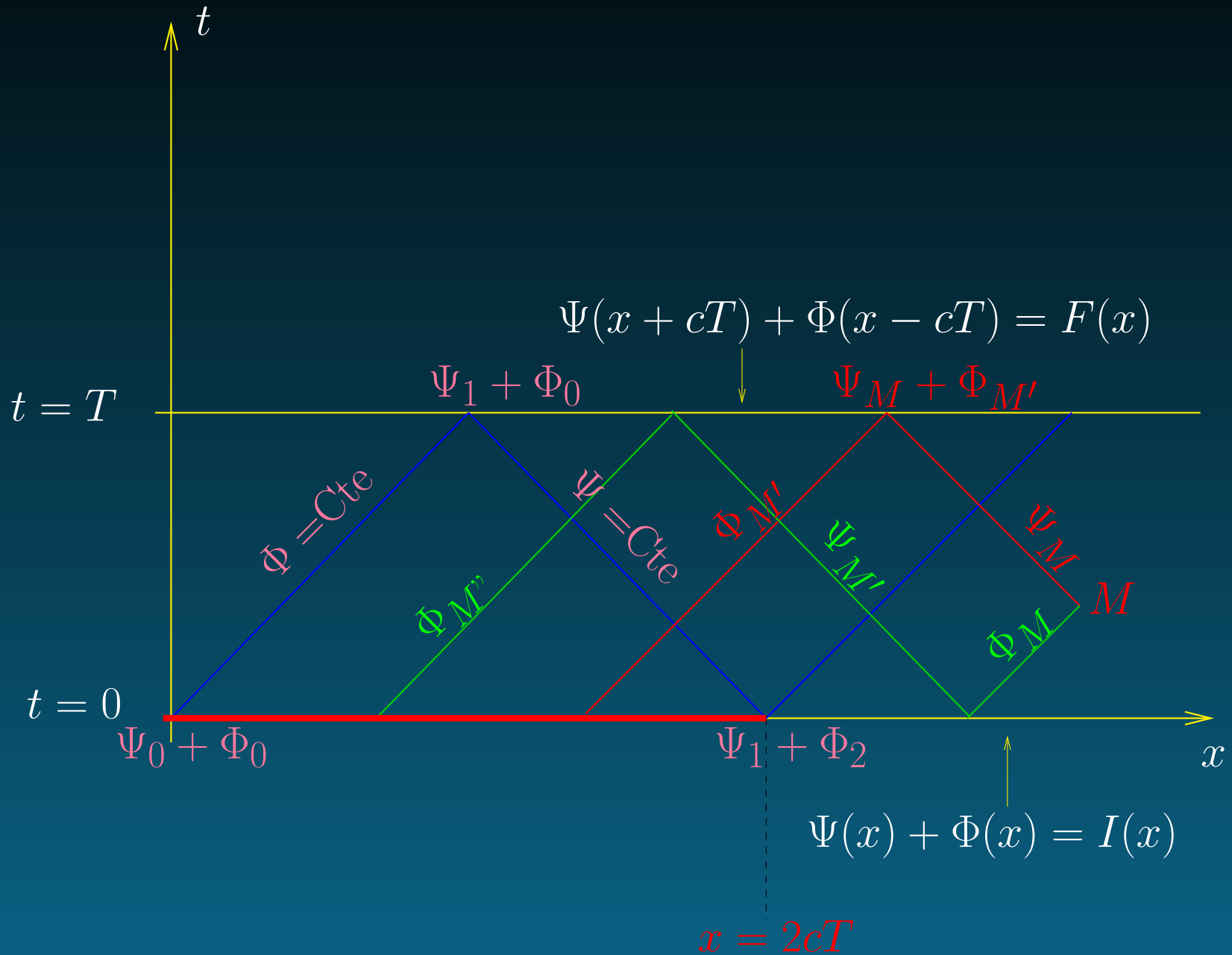
$(u, v)$  sont les coordonnées caractéristiques et les

courbes  $u = \text{Cte}$  et  $v = \text{Cte}$  sont les courbes caractéristiques.

Elles constituent deux familles indépendantes, dont les équations sont :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b'}{a'}$$

Illustrons ce qui précède avec l'équation d'onde à qui on impose des conditions limites de type Dirichlet, *i.e.* fonction donnée sur un contour.



## Remarques :

- Si  $\Phi$  est connue dans  $[0, 2cT]$  alors il l'est dans  $[2cT, 4cT]$ , etc...
- Connaître  $f(x, t)$  en un point quelconque du plan revient à connaître  $\Phi$  dans  $[0, 2cT]$ .
- Si on isole un rectangle du plan avec des segments de droite  $x = Cte$  où on fixe  $f$ , on peut générer **une incompatibilité** avec les valeur de  $\Phi$  dans  $[0, 2cT]$  et aboutir ainsi à **une fonction discontinue**.

## Back to Poincaré

Dans le cas de l'équation de Poincaré, les surfaces caractéristiques sont des cônes d'équation :

$$z = \pm \sqrt{\frac{1 - \omega^2}{\omega^2}} r + C \quad (7)$$

Leur trace dans un plan méridien sont des droites qui font un angle  $\vartheta = \arcsin(\omega)$  avec l'axe de rotation et représentent donc **la direction de propagation de l'énergie.**



# Les attracteurs

Les caractéristiques se réfléchissent sur les parois du conteneur et on peut suivre leur évolution comme celle d'un système dynamique.

Mais la dynamique est très simple car le vecteur vitesse n'a droit qu'à deux directions.

En général les caractéristiques convergent vers un attracteur.

Exemples :

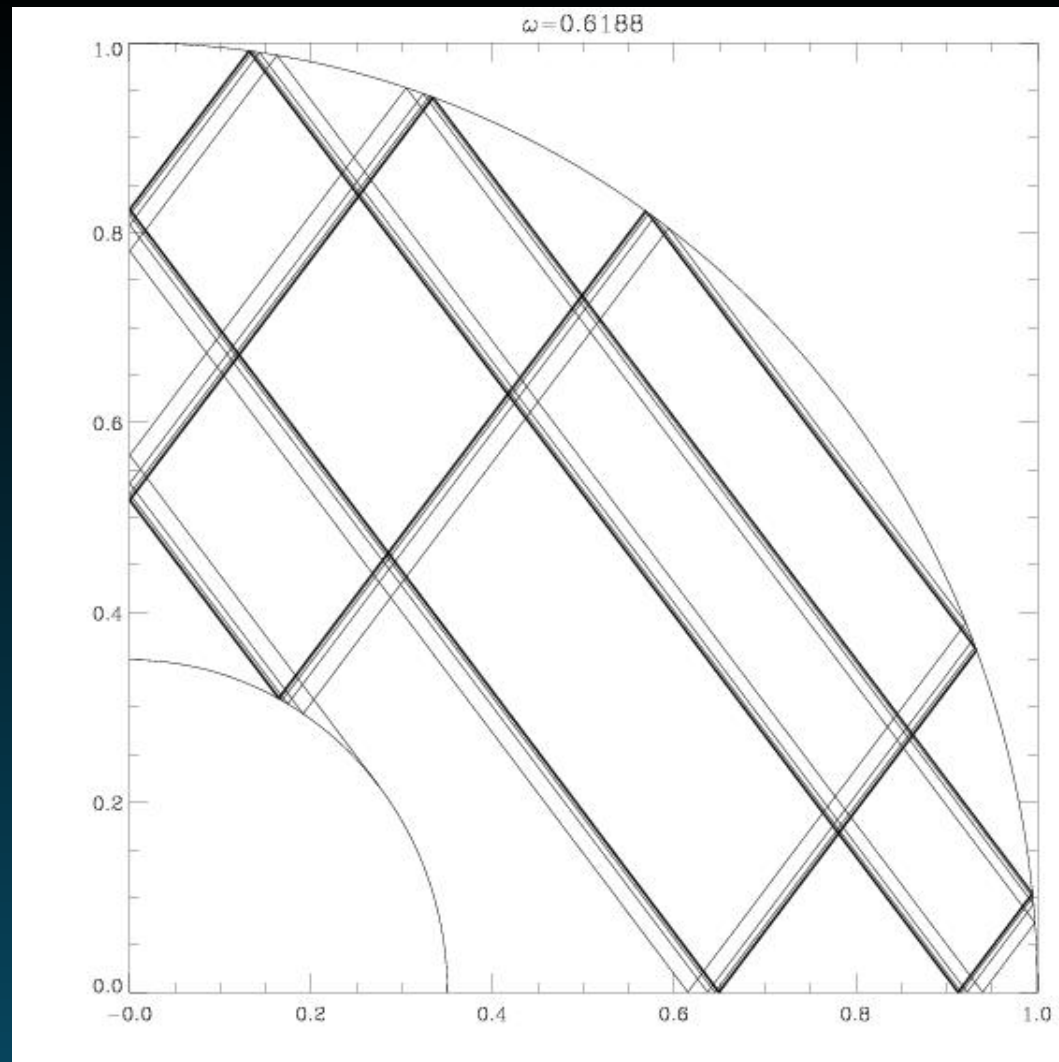


FIG. 2: Exemple de la convergence des caractéristiques vers un attracteur.

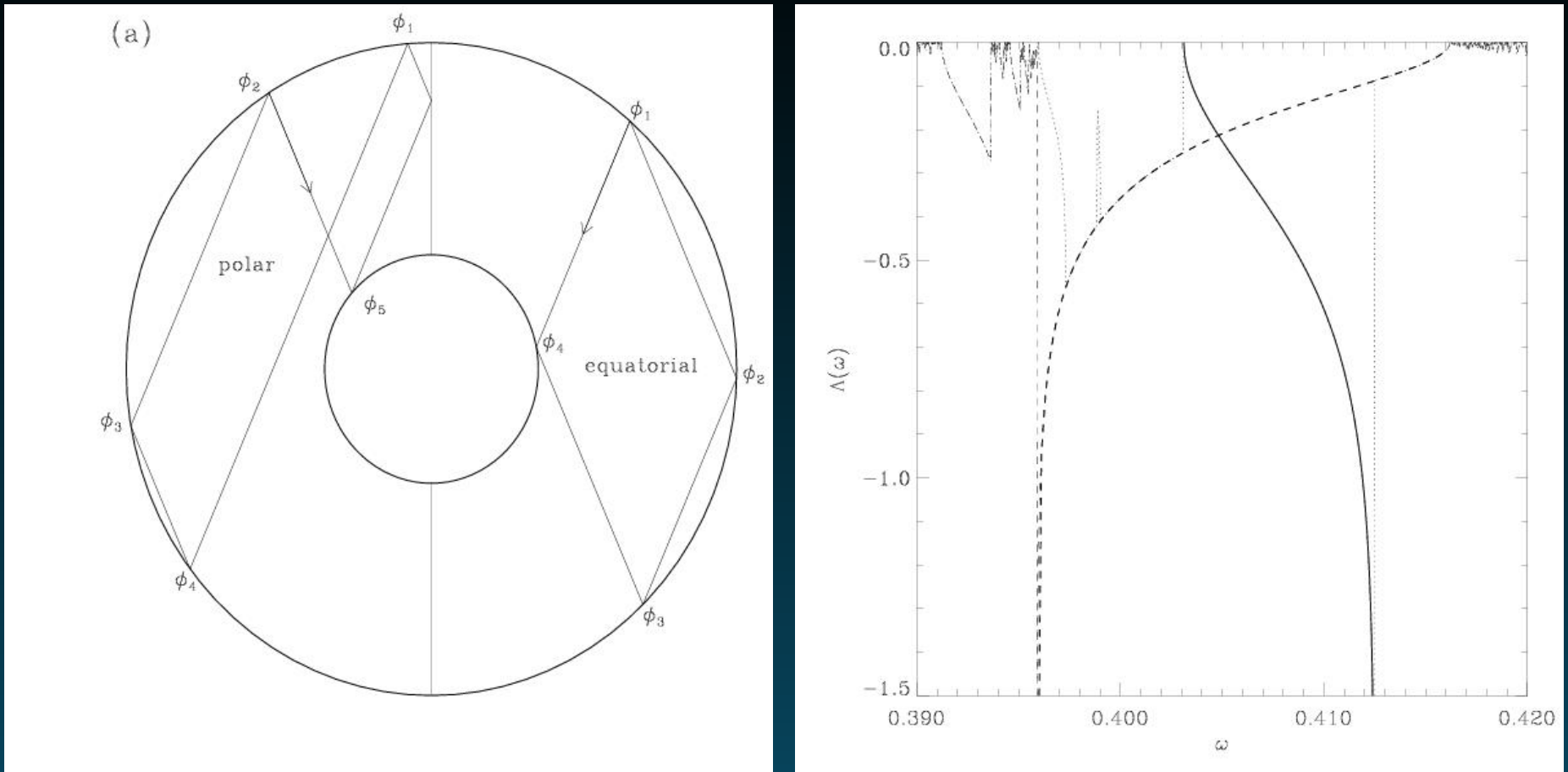


FIG. 3: Deux attracteurs et leur bassin d'attraction.

## Lorsque la viscosité s'en mêle

Le paquet d'onde finit par résister à la compression de l'attracteur, s'en suit alors un mode propre résultant de l'équilibre entre la diffusion visqueuse et la compression de la carte.

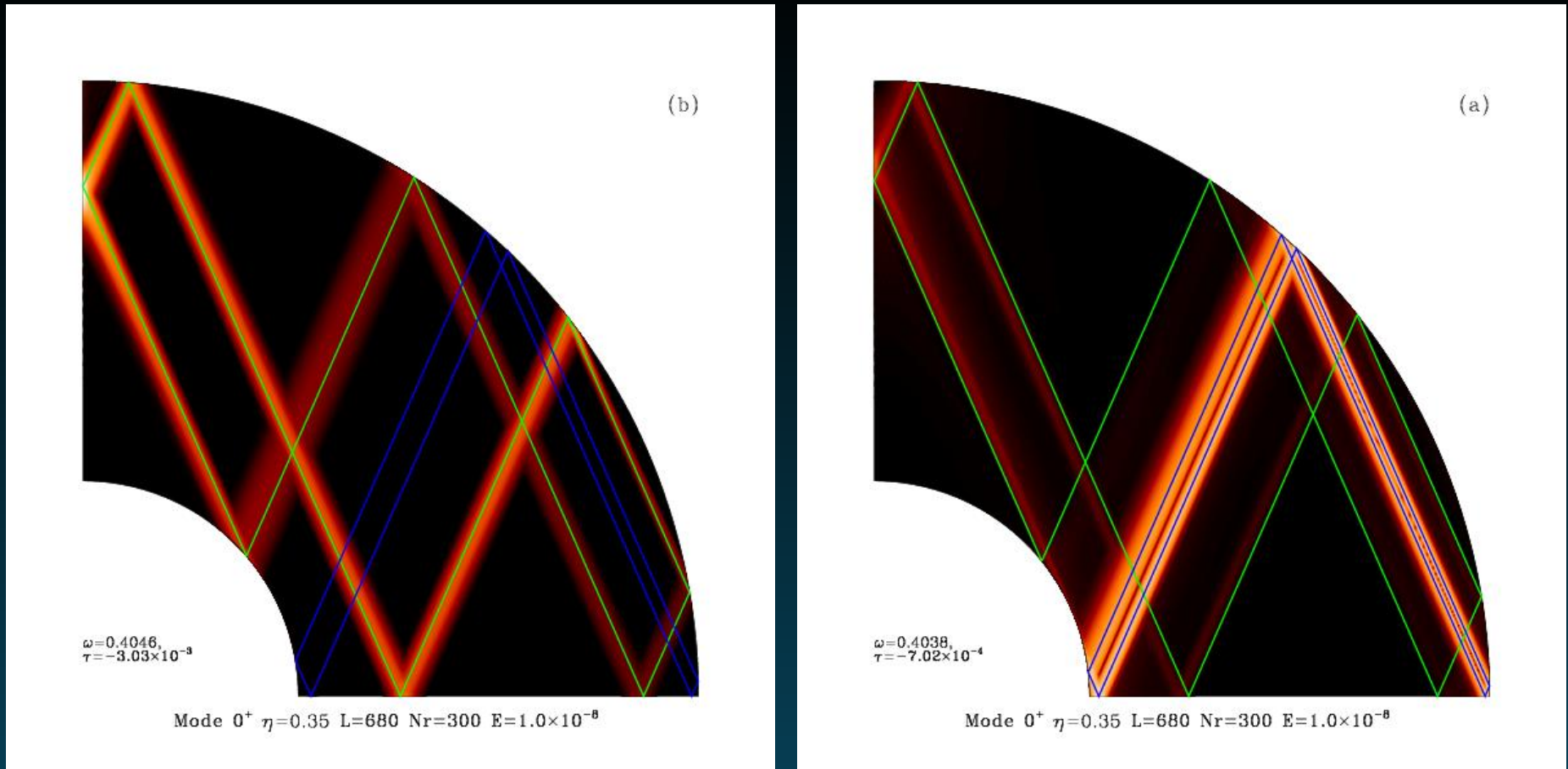


FIG. 4: Modes inertiels contrôlés par des attracteurs.

## La structure des rayons

Les modes propres contrôlés par la seule rotation apparaissent donc comme de fines couches de cisaillement. Dans le cas bidimensionnel cette structure est descriptible analytiquement :

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \left[ \frac{1}{4}z^2 + e^{i\pi/4}B \left( \frac{p}{2\alpha_0 A f_{20}} \right)^{1/2} (\tau_1 \pm i\omega_1) \right] u = 0$$

This differential equation is actually the Schrödinger

equation of a quantum particle trapped in a parabolic well, i.e. the famous harmonic oscillator. Its solutions are the parabolic cylinder functions :

$$u = U(a, z), \quad a = -n - \frac{1}{2} = e^{i\pi/4} B \left( \frac{p}{2\alpha_0 A f_{20}} \right)^{1/2} (\tau_1 \pm i\omega_1)$$

**Les attracteurs avaient fait disparaître les valeurs propres ; la viscosité les fait réapparaître. Exemple concret de régularisation d'un opérateur.**

(Rieutord et al. 2002, JFM, **463**, pp. 345-360)

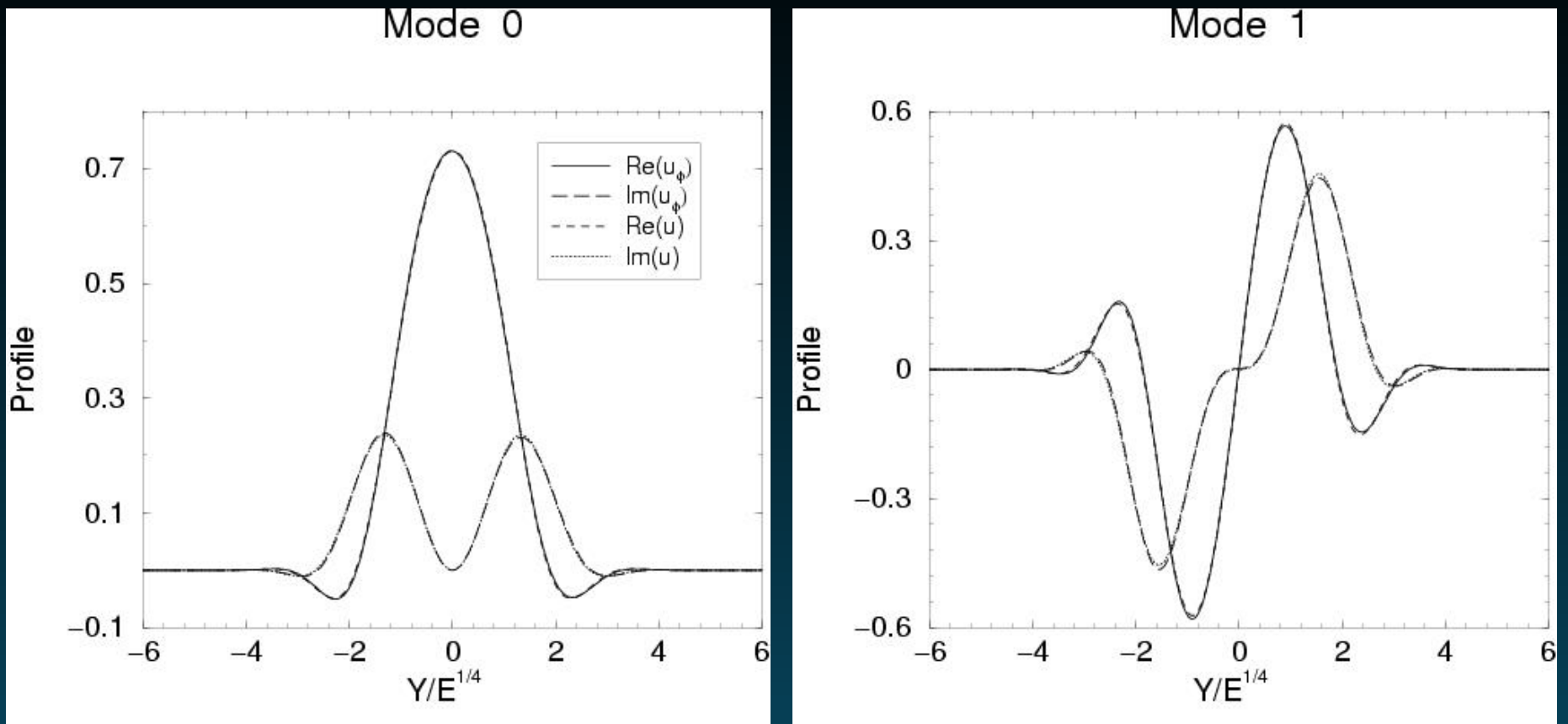


FIG. 5: Profils de modes propres piégés autour d'un attracteur.



## Et encore des singularités

Les conditions limites qui s'appliquent à la pression ne sont pas innocentes non plus ; on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

soit

$$-\omega^2 \vec{n} \cdot \vec{\nabla} P + (\vec{n} \cdot \vec{e}_z)(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} P) + i\omega(\vec{e}_z \wedge \vec{n}) \cdot \vec{\nabla} P = 0 \quad (8)$$

qui ne sont ni de Dirichlet ni de Neumann, mais aux dérivées obliques, sources d'ennuis (singularités de latitude critique).

## Remarque

Ces propriétés sont typiques des modes de gravité et des modes inertiels.

Pourtant les modes de gravité sont bien connus dans les étoiles et ces singularités n'ont jamais été remarquées, pourquoi ?

Les étoiles sont considérées comme des sphères parfaites et en géométrie sphérique, l'EDP contrôlant les modes de gravité est **à variables séparables**.

⇒ Les singularités disparaissent, les solutions sont nécessairement régulières.

## L'expérience de Maas et Sommeria

Les attracteurs ne sont pas une simple vue de l'esprit (du théoricien !); ils ont été mis en évidence expérimentalement sur des modes de gravité excités paramétriquement. Ref. Maas et al. (1997), Nature, **388**, 557

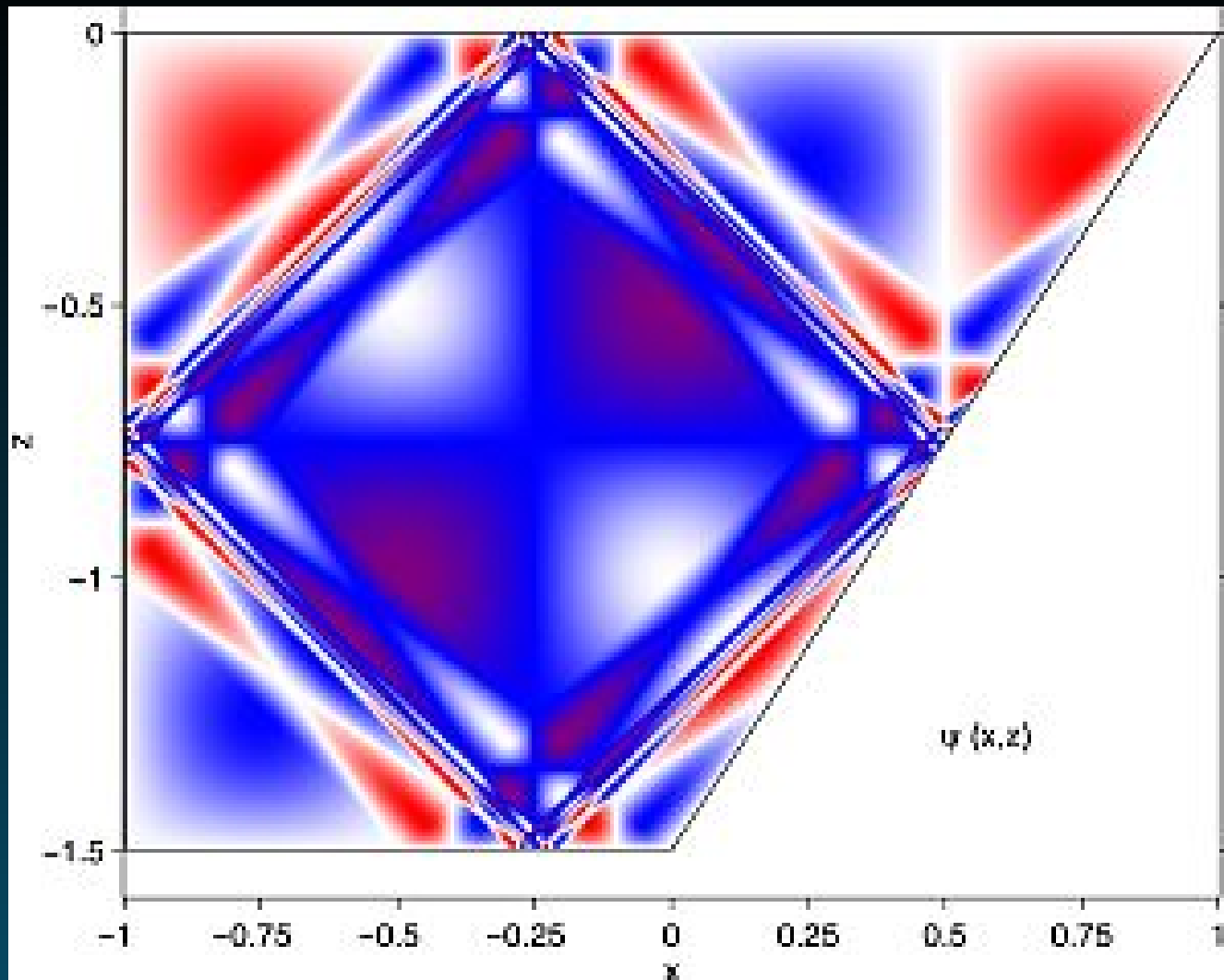


FIG. 6: Attractor for gravity modes in a trapezoidal bucket.

Now the experiment :

go !

# Les modes gravito-inertiels

Que se passe-t-il lorsqu'on combine rotation et stratification ?



# Nature du problème mathématique

Que devient l'équation de Poincaré ?

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ i\omega \vec{v} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \alpha T \vec{g} \\ i\omega T + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_0 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

On suppose

$$\vec{\nabla} T_0 = \beta(r) \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{g} = -g(r) \vec{e}_r$$

Après élimination de la température, l'équation de la dynamique devient

$$i\omega\vec{v} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla}p + \frac{N^2}{\omega}iv_r\vec{e}_r \quad (10)$$

Cette équation permet d'exprimer les composantes de  $\vec{v}$  en fonction du gradient de pression ; après report dans l'équation  $\text{div } \vec{v} = 0$  on obtient la généralisation de l'équation de Poincaré.

**Dans le cas axisymétrique**, les termes d'ordre plus élevé ont la forme suivante (en coordonnées cylindriques)

$$\begin{aligned}
 (\omega^2 - N^2 \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + 2N^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z} \\
 + (\omega^2 - N^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0
 \end{aligned}$$

Cette équation est **de type mixte** et la surface séparant les régions elliptiques des régions hyperboliques est donnée par

$$\omega^4 - (N^2(r) + 4\Omega^2)\omega^2 + 4\Omega^2 N^2(r) \cos^2 \theta = 0$$

Si la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  est proportionnelle à la distance radiale  $r$  comme dans un modèle souvent utilisé, alors les surfaces critiques sont des coniques.

Là encore les singularités sont la règle générale :

Les caractéristiques (qui ne sont plus des droites) sont focalisées vers des attracteurs :

- ponctuels
- ou en forme de cycle limite

**Exemples** extraits de Dintrans et al. 1999, JFM **398**,  
271–297 & Dintrans and Rieutord 2000, AA **354**, 86–98

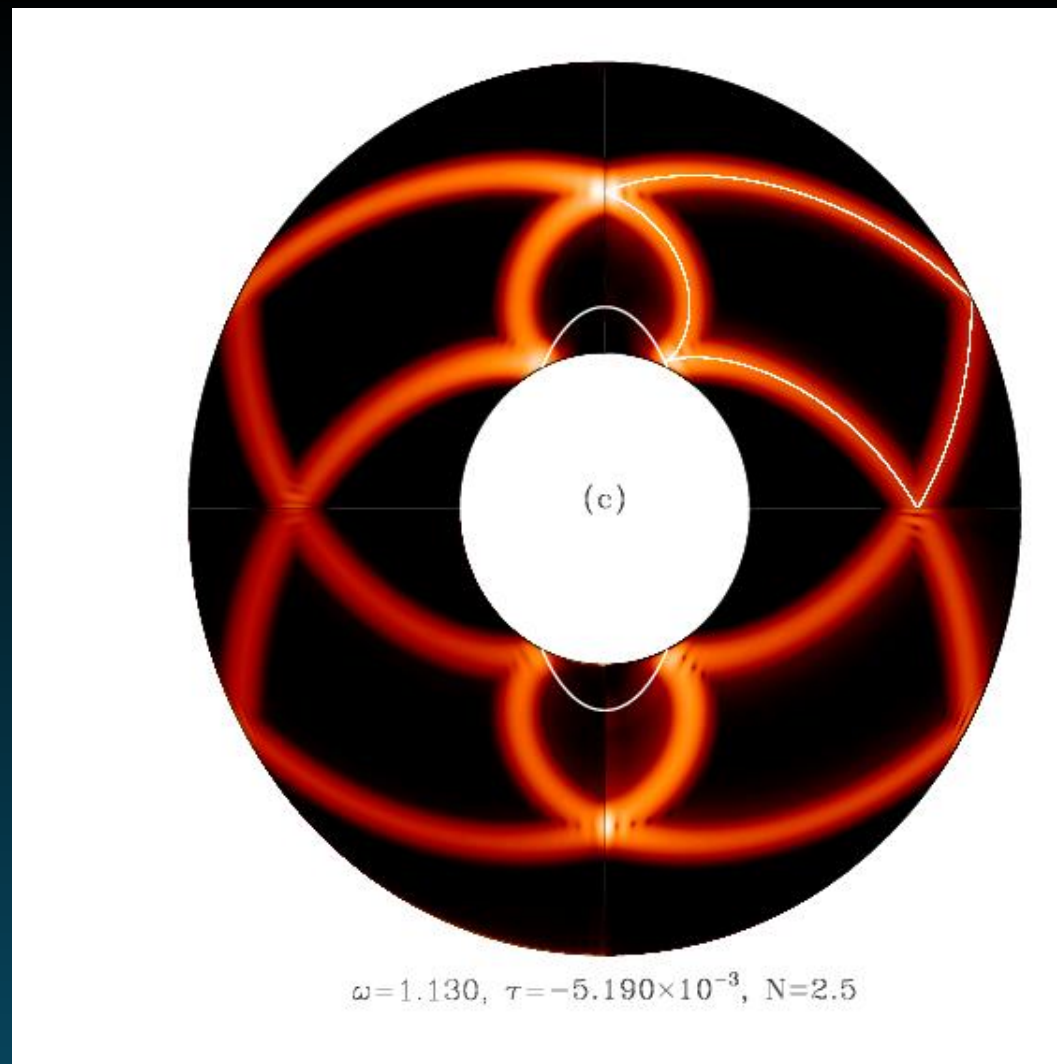


FIG. 7: Mode gravito-inertiel contrôlé par un attracteur.

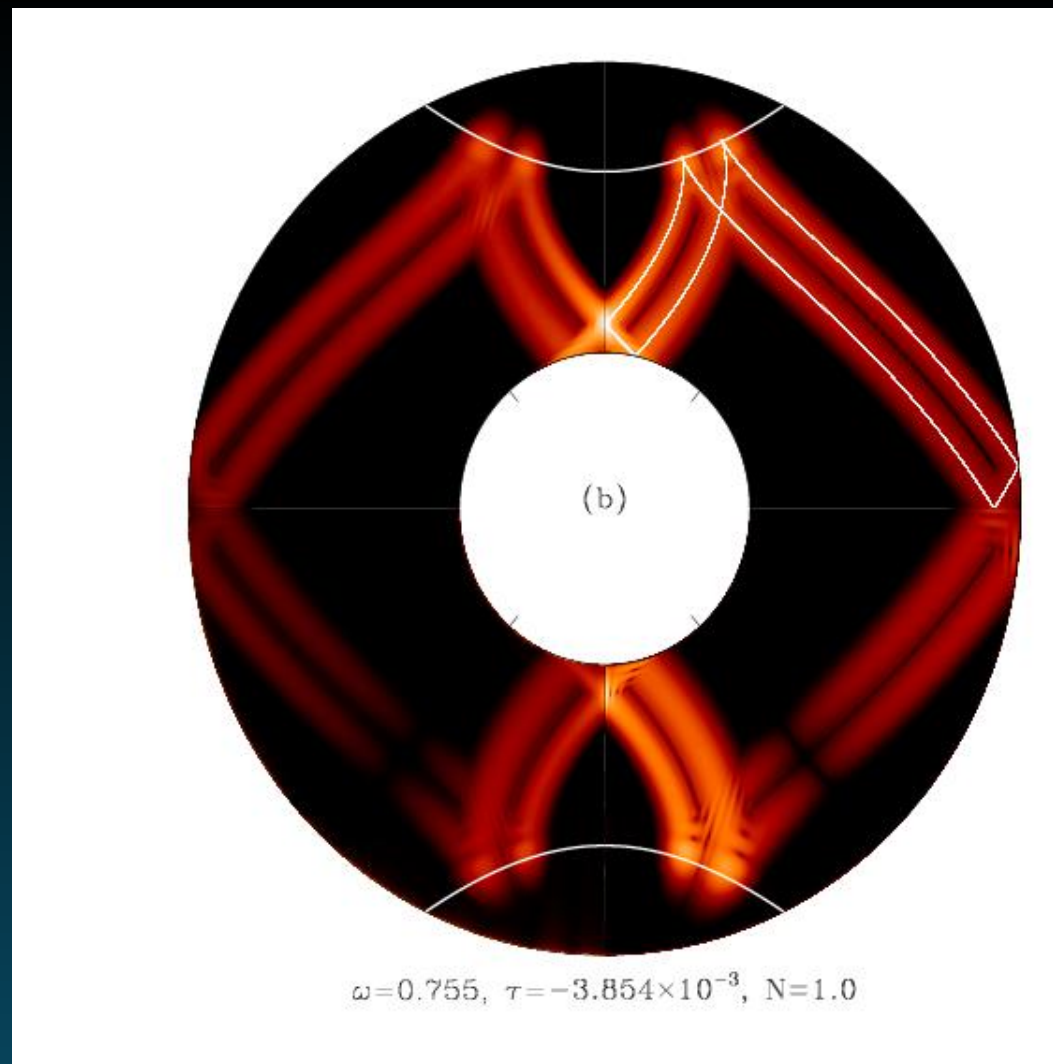


FIG. 8: Mode gravito-inertiel contrôlé par un attracteur.

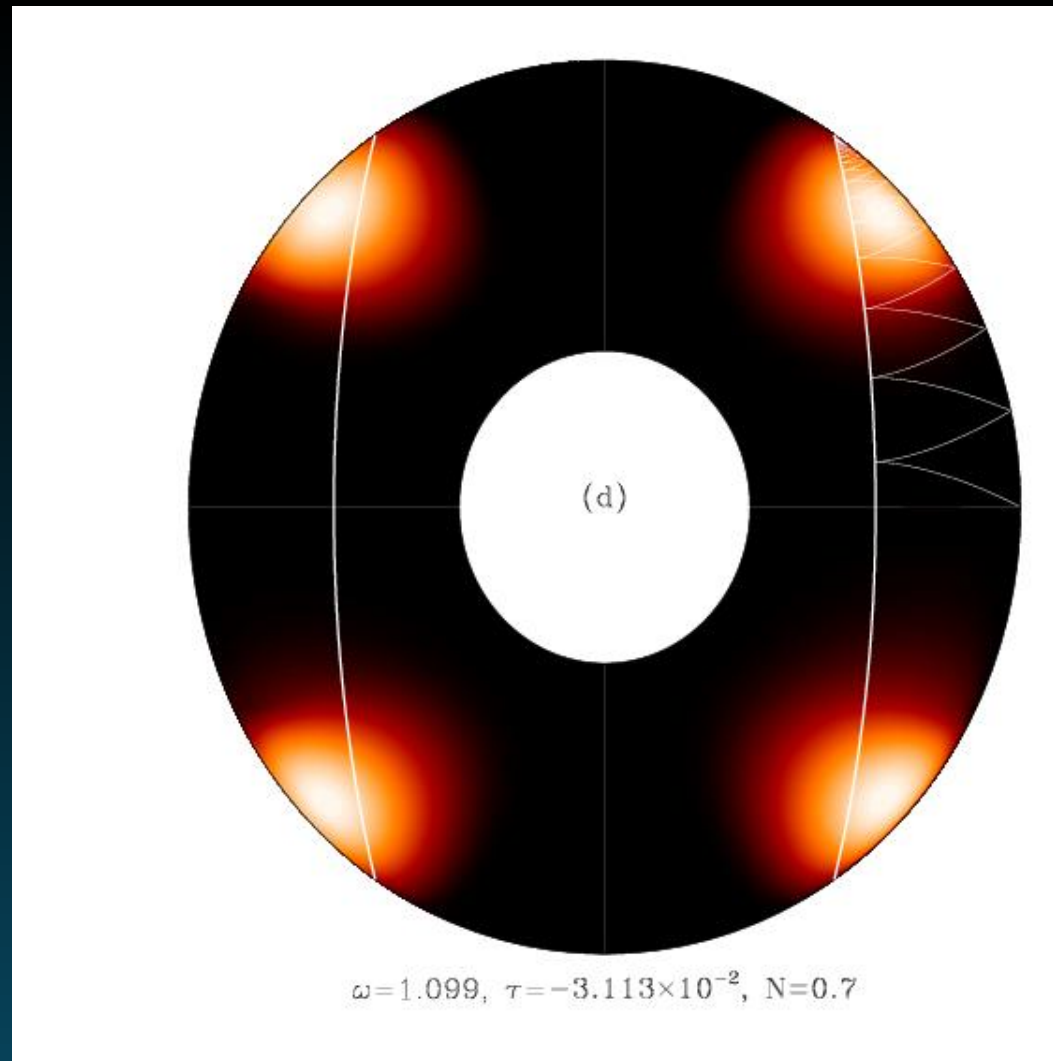


FIG. 9: Mode gravito-inertiel contrôlé par un attracteur ponctuel.



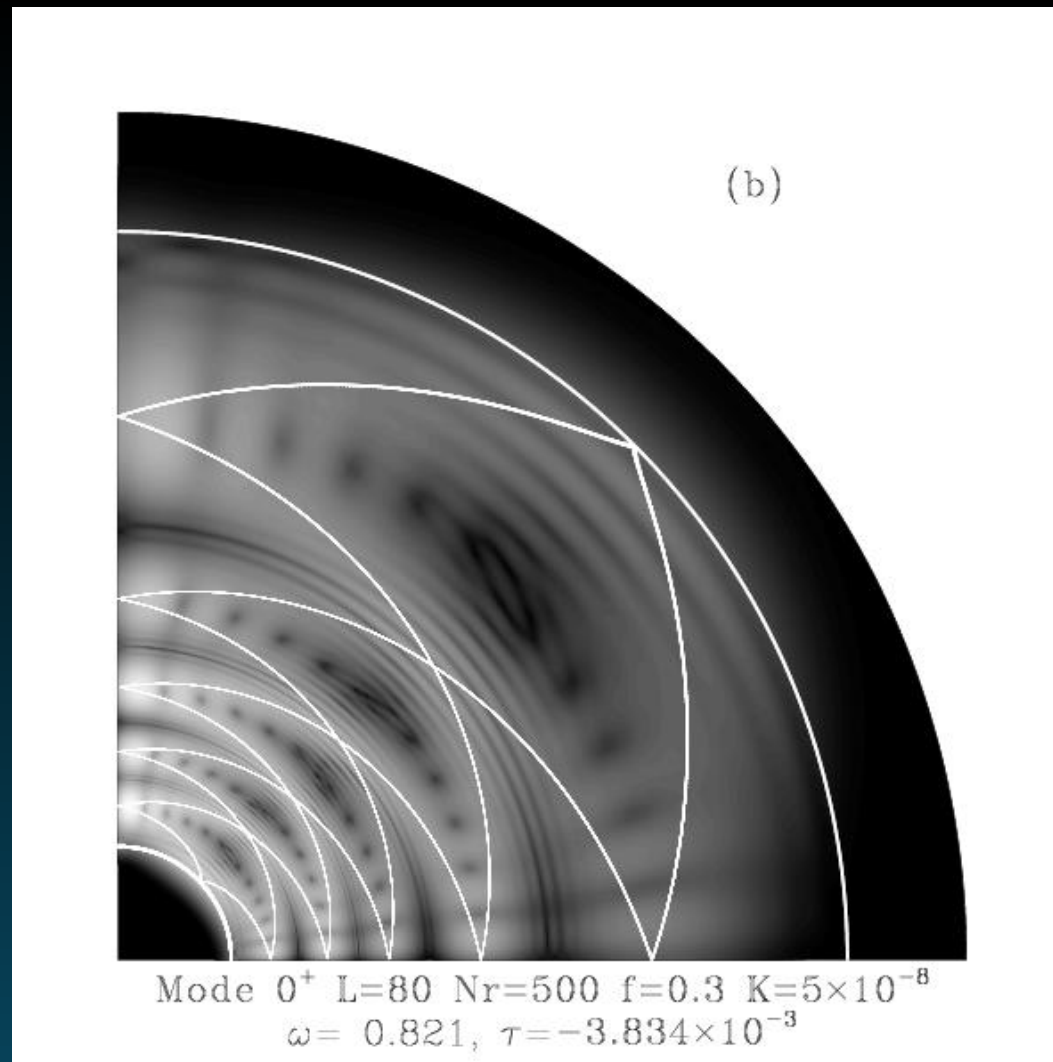


FIG. 10: Mode gravito-inertiel dans une étoile ZAMS  $1.5 M_{\odot}$ .

## Quelques conclusions

La dynamique des fluides en rotation est très riche et encore peu explorée :

- Structure des rayons en fluide stratifié
- Solutions analytiques pour le problème 3D
- Rôle de la géométrie sphéroïdale
- L'instabilité elliptique

**FIN**

# L'instabilité elliptique dans les étoiles doubles

## How it works

- Any vortex with elliptical streamlines is unstable : perturbations grow as  $\frac{1}{2}\varepsilon\Omega$ .  
 $\varepsilon$  =ellipticity,  $\Omega$  =rotation rate
- Viewed from the rotating frame of the fluid the ellipticity is a periodic forcing at  $2(\Omega_{\text{orb}} - \Omega_{\text{spin}})$ . This is a kind of parametric or sub-harmonic instability.

- Another view : tidal forcing allows nonlinear interaction between some (inertial) modes which pump the kinetic energy of rotation.
- Evolution : the rotation axis changes : the fluid velocity reaches a significant fraction of  $(\Omega_{\text{orb}} - \Omega_{\text{spin}})R$ .

## Application to stars : orders of magnitude

We need to evaluate how much energy can be dissipated by this instability :

$$E_{\max} \sim \frac{1}{2} I_{EIZ} (\Omega_{\text{orb}} - \Omega_{\text{spin}})^2$$

where  $I_{EIZ}$  is the inertia momentum of the zone developing the instability.

$$\text{Time} \sim [\varepsilon (\Omega_{\text{orb}} - \Omega_{\text{spin}})]^{-1}$$

Boundary conditions and the excitation of the spin-over modes  $\implies I_{EIZ} \sim I_{CZ}$  in late type stars (damping at a tachocline being neglected).

$$P_{\text{dissipated}} \sim \frac{\varepsilon}{2} I_{CZ} (\Omega_{\text{orb}} - \Omega_{\text{spin}})^3$$

Consider an eccentric orbit  $a, e$ , assuming  $E_{\text{spin}}, L_{\text{spin}} \ll E_{\text{orb}}, L_{\text{orb}}$ ; the energy to release is

$$\Delta E = -\frac{GM_1M_2}{2a} \frac{e^2}{1-e^2}$$

and this takes the time

$$T = \left( \frac{P_{\text{orb}}}{3\pi} \right) \left( \frac{M_1}{M_T} \right) \frac{e^2}{1 - e^2} \left( \frac{a}{R} \right)^5 \left( \frac{M_1 R^2}{I_{CZ}} \right) \left( \frac{P_{\text{orb}}}{P_{\text{spin}}} - 1 \right)^{-3}$$

Example

$$M_1 = M_2 = 1M_{\odot}, \quad R = 700 \text{ Mm}$$

$$P_{\text{orb}} = 10 \text{ days}, \quad P_{\text{spin}} = 1 \text{ days}, \quad e = 0.1$$

$$T \sim 150 \text{ yr}$$



It is very efficient ; too efficient ?

But there are still a number of unknowns :

- The role of detached shear layers, turbulent convection,  
...
- The role of stratification
- Saturation of the instability and level of turbulence reached

## An experiment would be helpful

A spinning ball of fluid is stopped at  $t=0$ , with an elliptical equatorial cross-section. How does it spin down, compared to the same ball with a circular cross-section?

**FIN**

## Le spin-up par effet de marée

Dans les étoiles pas de parois solides :

La condition  $\vec{v} \wedge \vec{n} = \vec{0}$  est remplacée par

$$\vec{n} \wedge [\sigma] \vec{n} = \vec{0}$$

Nous avons toujours un écoulement de couche limite

$$(\vec{n} \wedge \tilde{u}_0 + i\tilde{u}_0) = \vec{C} \exp\left(-\zeta \sqrt{i(\vec{n} \cdot \vec{e}_z)}\right) \quad (11)$$

mais la constante se calcule avec les nouvelles conditions :

$$\begin{cases} \sigma_{xz}(\vec{u}_0) + \sigma_{xz}(\tilde{u}) = 0 \\ \sigma_{yz}(\vec{u}_0) + \sigma_{yz}(\tilde{u}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

where  $\sigma_{xz}$  and  $\sigma_{yz}$  are the two components of the tangential viscous stress.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_{0,x}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_{1,x}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_{1,y}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad \text{at surface} \quad (13)$$

Comme

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \mathcal{O}(E^{-1/2}) \quad \text{dans la couche limite}$$

La constante  $C$  est  $\mathcal{O}(\sqrt{E})$ . Donc la correction de couche limite à l'écoulement central n'est plus  $\mathcal{O}(1)$  mais  $\mathcal{O}(\sqrt{E})$ .

**donc le pompage et la circulation d'Ekman sont  $\mathcal{O}(E)$**

Donc le temps de spin-up est augmenté d'un facteur  $1/\sqrt{E}$  : il est de l'ordre du temps visqueux.

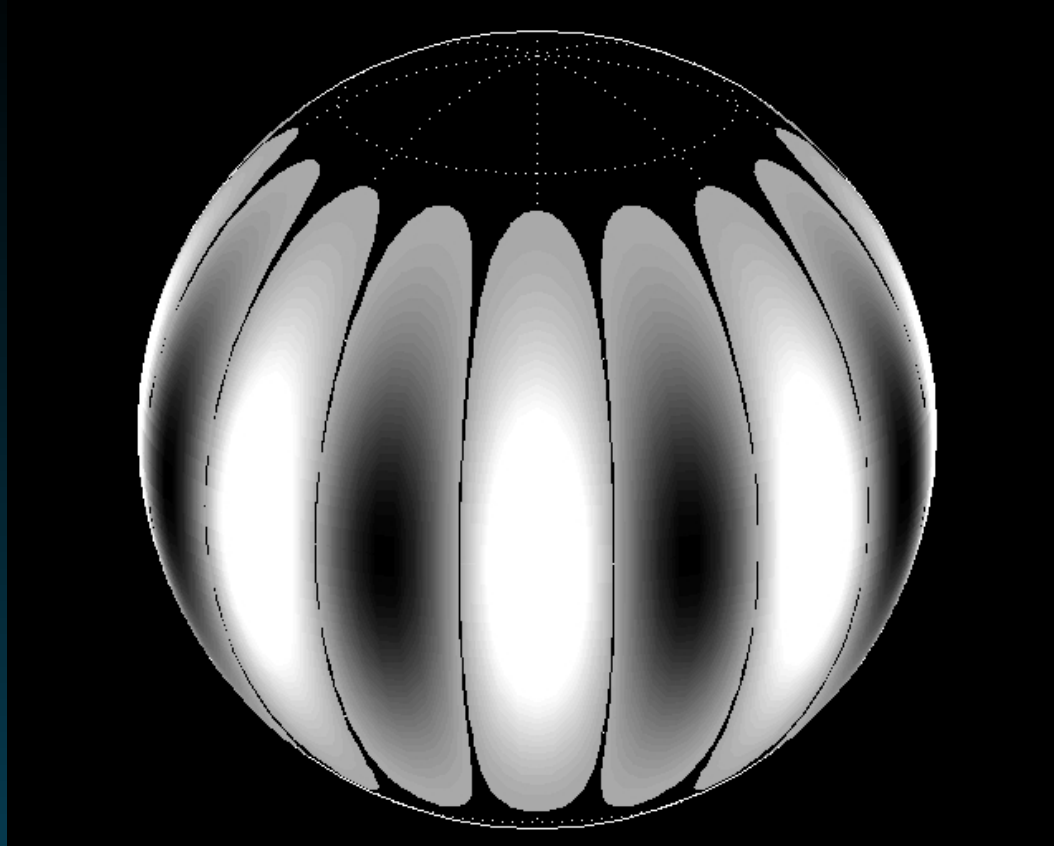


FIG. 11: Oscillation sur un mode équatorial  $m=8$ .



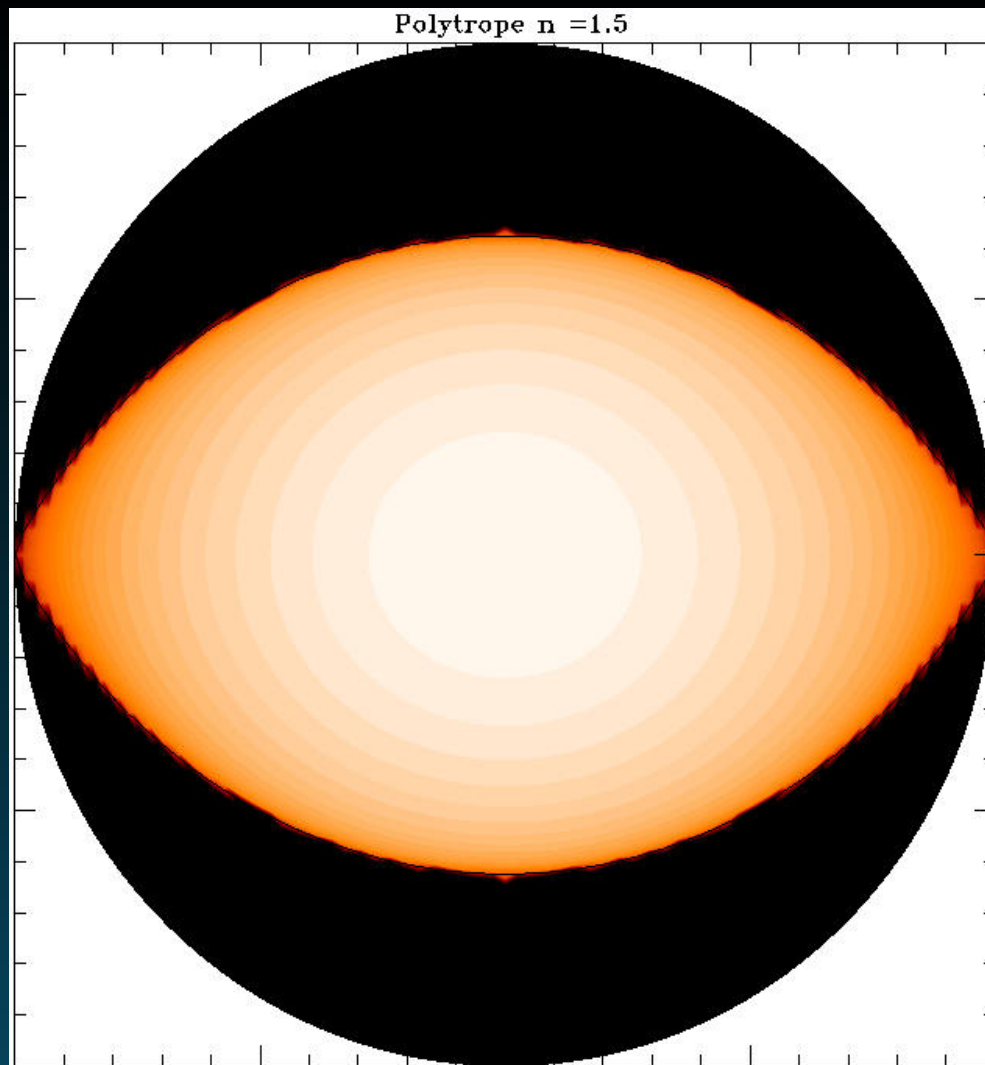


FIG. 12: Etoile de  $0.6 M_{\odot}$  en rotation à la vitesse maximale.

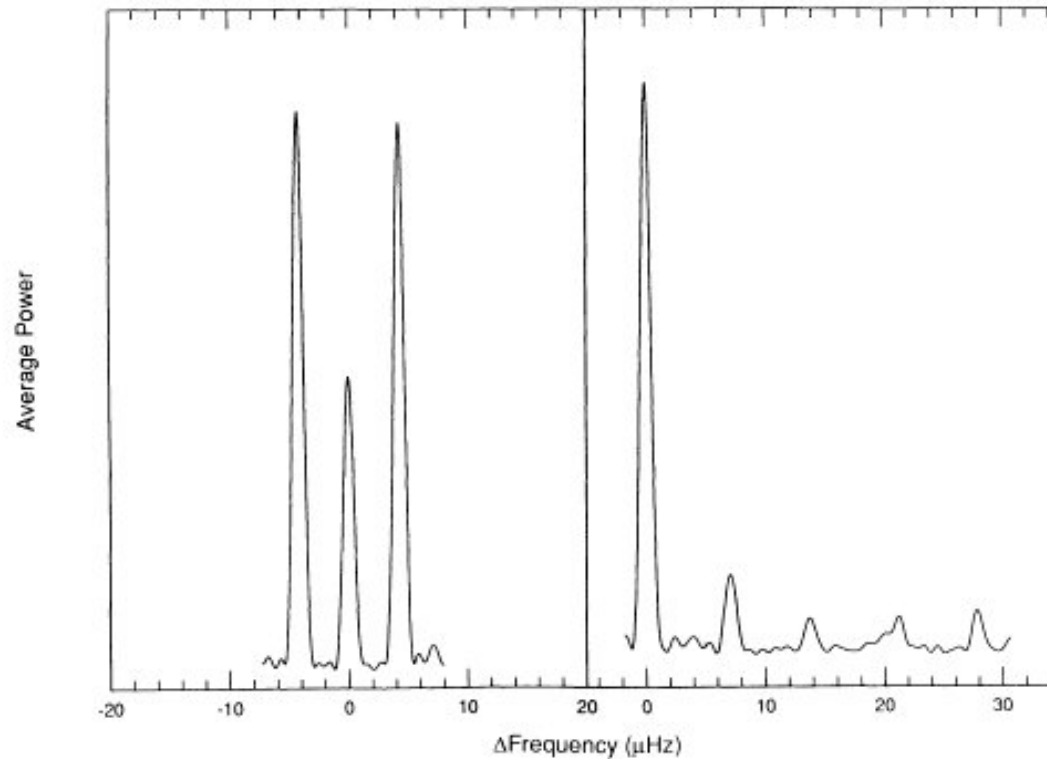


FIG. 6.—Average of the power in the multiplets shown in Fig. 4 for  $l = 1$  (*left panel*) and  $l = 2$  (*right panel*)

FIG. 13: Exemple de spectres d'oscillation avec rotation pour une naine blanche (PG1159-035, courtesy G. Vauclair)